

УДК 514.18

Н. В. Островский

ПОСТРОЕНИЕ ЭЛЛИПСА ПО ДВУМ РАДИУС-ВЕКТОРАМ, ВЫХОДЯЩИМ ИЗ ОДНОГО ФОКУСА

В данной работе предлагается решение задачи построения эллипса по двум радиус-векторам, выходящим из одного фокуса. Решение найдено исходя из свойств эллипса и треугольника. Через две точки можно провести семейство эллипсов, для каждого из которых существует определённая связь между длиной большой полуоси и другими параметрами. В статье рассмотрено влияние: длины большой полуоси на эксцентриситет эллипса и положение его перигея относительно исходных радиус-векторов; соотношения между длинами радиус-векторов на ориентацию эллипса в пространстве; величины угла между исходными радиус-векторами на эксцентриситет эллипса при фиксированной длине большой полуоси. Предложенный алгоритм может быть использован при проектировании перелётных орбит в межпланетных космических сообщениях.

Ключевые слова: построение эллипсов, перелётные орбиты.

Задача построения эллипса по двум радиус-векторам возникает, когда нам нужно найти форму эллипса, одна точка которого (точка B), принадлежит первому эллипсу, а другая (точка C) – второму эллипсу (см. рис. 1). Причём все три эллипса имеют общий фокус A . Эта задача является актуальной при нахождении перелётных орбит в межпланетных космических сообщениях [1, 2], но её решение в доступных источниках информации отсутствует (см., например, [3–8]).

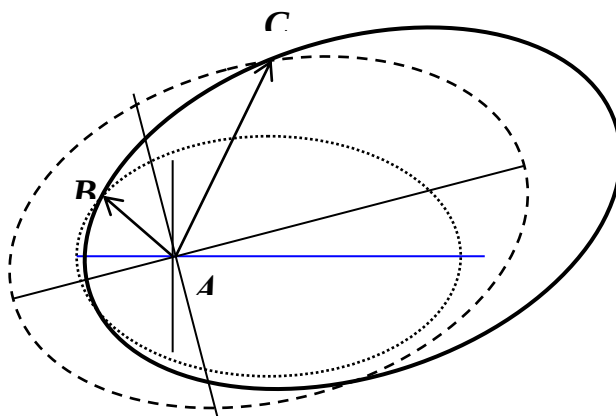


Рис. 1. Перелётная орбита между двумя эллиптическими орбитами

Эллипс однозначно описывается любыми двумя из четырёх параметров [3, с. 40–50]:

a – длина большой полуоси,

b – длина малой полуоси,

c – половина фокусного расстояния,

e – эксцентриситет,

поскольку они связаны между собой следующими уравнениями:

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad (1)$$

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}. \quad (2)$$

Обратимся к рис. 2. Итак, нам известны длины AB и AC и угол BAC . Через точки B и C можно провести целое семейство эллипсов, характеризующихся определённой взаимосвязью параметров. Т. е. мы можем, например, найти e как функцию от a .

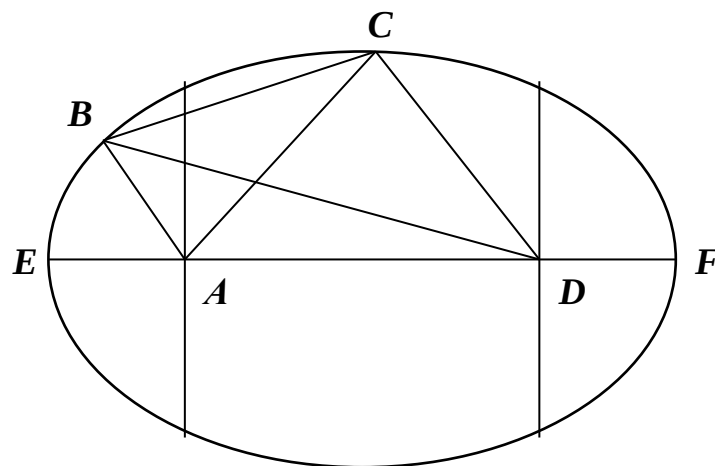


Рис. 2. Чертёж для нахождения параметров эллипса

Выделим второй фокус эллипса D . Теперь, исходя из свойств эллипса и треугольника, мы можем составить следующую систему уравнений:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC}, \quad (4)$$

$$DB = 2a - AB, \quad (5)$$

$$DC = 2a - AC, \quad (6)$$

$$\cos \angle BCD = \frac{BC^2 + DC^2 - BD^2}{2 \cdot BC \cdot DC}, \quad (7)$$

$$\cos \angle BCA = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2 \cdot BC \cdot AC}, \quad (8)$$

$$\angle ACD = \angle BCD - \angle BCA, \quad (9)$$

$$2c = AD = \sqrt{AC^2 + DC^2 - 2 \cdot AC \cdot DC \cdot \cos \angle ACD}, \quad (10)$$

$$\cos \angle BAD = \frac{AB^2 + DB^2 - AD^2}{2 \cdot AB \cdot DB}, \quad (11)$$

$$\angle EAB = \pi - \angle BAD, \quad (12)$$

$$\angle EAC = \angle EAB \pm \angle BAC. \quad (13)$$

Выбор знака в уравнении (13) зависит от направления отсчёта угла BAC .

Длина радиус-вектора любой точки эллипса может быть найдена по известному уравнению [3, с. 50]:

$$r = \frac{b^2/a}{1 + e \cos \theta}, \quad (14)$$

где θ – угол радиус-вектора относительно перицентра эллипса.

Как, уже было отмечено выше, по двум радиус-векторам можно построить бесконечное множество эллипсов, различающихся значением длины большой полуоси и связанной с ним величиной эксцентриситета. Минимальное значение длины большой полуоси может быть найдено из выражения для косинуса угла BCD (см. уравнение (7)):

$$-1 \leq \frac{BC^2 + DC^2 - BD^2}{2 \cdot BC \cdot DC} \leq 1. \quad (15)$$

Рассмотрим влияние различных параметров на форму и расположение искомого эллипса в пространстве.

Увеличение длины большой полуоси a при фиксированных значениях длин радиус-векторов AB и AC и угла BAC ведёт к увеличению межфокусного расстояния эллипса c и величины эксцентриситета. При этом величина $\angle EAB$ уменьшается (см. табл. 1).

Таблица 1

Влияние на параметры искомого эллипса длины большой полуоси
($AB = 1,0$, $AC = 1,1$, $\angle BAC = 30^\circ$)

a	c	e	$\angle EAB$
1,000	0,188	0,187	101°
1,100	0,206	0,187	70,8°
1,200	0,265	0,221	50,2°
1,500	0,527	0,351	26,1°
2,000	1,013	0,507	16,0°

При фиксированных значениях длины большой полуоси и угла BAC увеличение соотношения между длинами радиус-векторов AC и AB ведёт к увеличению эксцентриситета искомого эллипса и величины угла EAB . Искомый эллипс разворачивается относительно фиксированной точки B (см. рис. 3).

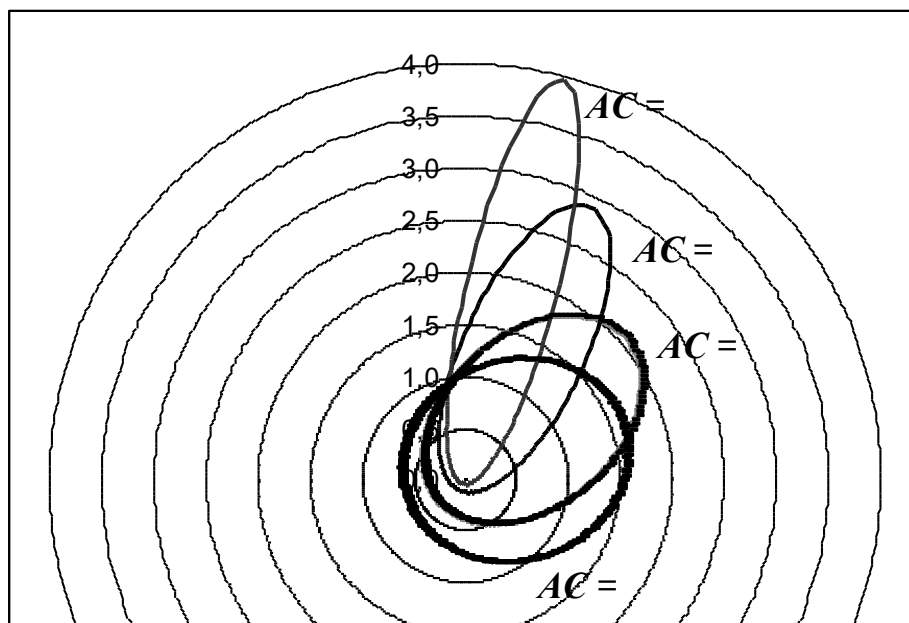


Рис. 3. Влияние на форму и положение искомого эллипса соотношения AC/AB
 $(a = 1,1, AB = 1,0, \angle BAC = 10^\circ)$

Зависимость эксцентриситета искомого эллипса от величины угла BAC при фиксированных значениях a , AB и AC имеет два минимума, один максимум и точку разрыва при нуле градусов (см. рис. 4). Аналогичным образом изменяется и величина угла EAB .

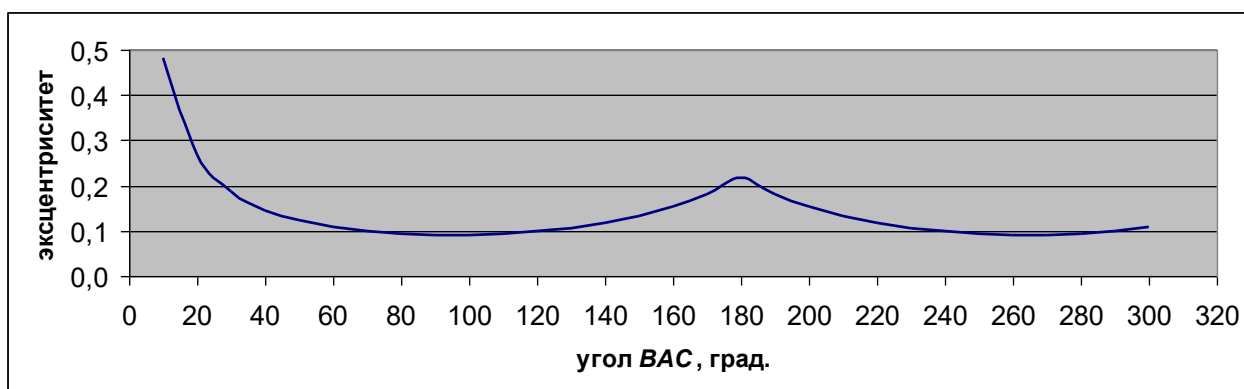


Рис. 4. Зависимость эксцентриситета искомого эллипса от величины $\angle BAC$
 $(a = 1,1, AB = 1,0, AC = 1,1)$

Список литературы

1. Space Mission Analysis and Design. Third Edition. Edited by Wiley J. Larson and James R. Wertz. Microcosm Press, Kluwer Academic Publishers (Dordrecht / Boston / London), 2005.
2. Проектирование автоматических космических аппаратов для фундаментальных научных исследований / коллектив авторов; ред. В. В. Хартов, В. В. Ефанов: в 3 т. Т. 2. 2-е изд., перераб. М.: Изд-во МАИ-Принт, 2014. 544 с.
3. Александров А. Д., Нецветаев Н. Ю. Геометрия: учеб. пособие. М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. 672 с.
4. Делоне Б. Н., Райков Д. А. Аналитическая геометрия. М.; Л.: Гос. изд-во технико-теорет. лит., 1948. 457 с.
5. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. Изд. 10. М.: Наука, 1967. 272 с.
6. Клетник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. Изд. 13. М.: Наука, ГРФМЛ, 1980.
7. Михайлов Л. Е. Аналитическая геометрия: учеб.-метод. пособие. М.: МИФИ, 2009. 82 с.
8. Резниченко С. В. Аналитическая геометрия в примерах и задачах (алгебраические главы). М.: МФТИ, 2001. 576 с.

ОСТРОВСКИЙ Николай Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры промышленной безопасности и инженерных систем, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: ecol34@list.ru