Технические науки

УДК 62-83:004

В. В. Рычков

РЕЛЕЙНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОГРАММНЫМИ ДВИЖЕНИЯМИ

В статье рассматриваются проблемы механики управления программными движениями манипуляционных систем. Уравнения движения задаются в виде дифференциальных уравнений второго порядка, которые решены относительно вторых производных обобщённых координат. Программа движения задаётся с помощью программного многообразия. Характеристики исполнительных органов могут иметь вид $u_r = f_r(\sigma_r), \quad r = \overline{1,N}, \ k_{1r} \le \dfrac{f_r(\sigma_r)}{\sigma_r} \le k_{2r}$.

Вначале рассматривается случай, когда программное многообразие задано в виде

$$\omega_\mu(q,t) = 0, \qquad \mu = \overline{1,S_1},$$
$$\omega_\nu(q,\dot{q},t) = 0, \quad \nu = \overline{S_1+1,S};\ S \le N.$$

Составляется квадратичная форма из компонент вектора отклонений и их производных. Дифференцируя квадратичную форму и подставляя в уравнения, получаются выражения скоростей и ускорений через обобщённые координаты. Для придания процессу убывания формы гарантированного характера в левую часть вводится некоторая заданная неотрицательная функция, обращающаяся в нуль лишь, когда форма равна нулю.

С учётом этого можно утверждать, что изображающая точка в пространстве обобщённых координат при управлении, вычисляемом по формуле, будет совершать колебательное движение, находясь в некоторой окрестности программного многообразия.

Затем рассматривается случай $\omega_\lambda(q) = C_\lambda, \quad \lambda = \overline{1,S_2};\ S_2 \le N.$ Получается аналогичный результат.

Ключевые слова: программное многообразие, релейное управление, матрица коэффициентов, вектор отклонений, квадратичная форма.

Здесь рассматривается способ формирования управляющих сигналов σ, когда задано программное многообразие Ω:

$$\begin{aligned} \omega_\mu(q,t) &= 0, \qquad \mu = \overline{1,S_1}, \\ \omega_\nu(q,\dot q,t) &= 0, \quad \nu = \overline{S_1+1,S};\ \ S \le N, \end{aligned} \qquad (1)$$

где q – N-мерный вектор обобщённых координат основания и манипулятора; $\dot q = \dfrac{dq}{dt}$; $N = N_1 + N_2$; N_1 –число обобщённых координат основания; N_2 – число обобщённых координат манипулятора, или (Ω_1)-мерного гладкого многообразияΩ_1:

$$\omega_\lambda(q) = C_\lambda, \quad \lambda = \overline{1,S_2};\ \ S_2 \le N, \qquad (2)$$

где C_λ – произвольные постоянные.

Уравнения движения имеют вид [1,2]

$$\ddot q = F(q,\dot q) + B(q,\dot q)\cdot u, \qquad (3)$$

где $F(q,\dot q)$, $B(q,\dot q)$ – заданные N-мерный вектор и $(N \times N)$-матрица; u – N-мерный вектор управления.

Характеристики исполнительных органов могут иметь вид [3]

$$u_r = f_r(\sigma_r), \quad r = \overline{1,N}, \qquad (4)$$

где σ_r – входные управляющие сигналы; $f_r(\sigma_r)$– неизвестные непрерывные функции, удовлетворяющие лишь условиям $f_r(\sigma_r) = 0$, $k_{1r} \le \dfrac{f_r(\sigma_r)}{\sigma_r} \le k_{2r}$, где k_{1r}, k_{2r} – заданные положительные постоянные.

1. Вначале рассмотрим случай, когда программное многообразие задано в виде (1).

В качестве вектора отклонений примем

$$\Omega^{\mathrm{T}} = (\omega_1,\ldots,\omega_S).$$

Составим квадратичную форму из компонент вектораΩи их производных

$$V(\Omega,\dot\Omega) = \frac{1}{2}\left(\Omega^{\mathrm{T}}\cdot\gamma\cdot\Omega\right) + \frac{1}{2}\left(\dot\Omega_1^{\mathrm{T}}\cdot\gamma'\cdot\dot\Omega_1\right), \qquad (5)$$

где $\Omega_1^{\mathrm{T}} = \left(\omega_1, \ldots, \omega_{S_1}\right)$; $\dot{\Omega}_1 = \dfrac{d\Omega_1}{dt}$; $\gamma = diag\{\gamma_1 \ldots \gamma_S\}$; $\gamma' = diag\{\gamma'_1 \ldots \gamma'_{S_1}\}$; γ_λ, $\lambda = \overline{1,S}$ и γ'_ϑ, $\vartheta = \overline{1,S_1}$ – положительные постоянные.

Для приближения к программному многообразию необходимо обеспечить в силу уравнений (3) и (4) условие $\dfrac{dV}{dt} < 0$ всё время пока $V \neq 0$.

Дифференцируя (5) по времени, получаем

$$\frac{dV}{dt} = \Omega^{\mathrm{T}} \cdot \gamma \cdot \dot{\Omega} + \dot{\Omega}_1^{\mathrm{T}} \cdot \gamma' \cdot \ddot{\Omega}_1 . \tag{6}$$

Представим выражения $\dot{\Omega}$, $\dot{\Omega}_1$, $\ddot{\Omega}_1$ через обобщённые координаты, скорости и ускорения

$$\begin{aligned}
&\dot{\Omega}_1 = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \Omega_1}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial \Omega_1}{\partial t};\\
&\dot{\Omega}_2 = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \dot{q}_j} \cdot \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \Omega_2}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial \Omega_2}{\partial t};\\
&\ddot{\Omega}_1 = \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{\partial \Omega_1}{\partial q_j} \cdot \ddot{q}_j + \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + 2 \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial q_j \partial t} \right) \dot{q}_j \right] + \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial t^2},
\end{aligned} \tag{7}$$

где $\Omega_2 = \left(\omega_{S_1+1}, \ldots, \omega_S\right)$.

Подставляя (7) в (6), получим

$$\frac{dV}{dt} = G^{\mathrm{T}} \cdot \ddot{q} + L',$$

где G – ($N \times I$)-матрица с элементами

$$G_\mu = \dot{\Omega}_1^T \cdot \gamma' \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial q_\mu} + \Omega_2^T \cdot \gamma'' \cdot \frac{\partial \Omega_2}{\partial \dot{q}_\mu}, \ \mu = \overline{1,S_1};$$

$$\gamma'' = diag\{\gamma''_{S_1+1} \ldots \gamma_S\};$$

$$L' = \Omega^T \cdot \gamma \cdot \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \Omega}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right) + \dot{\Omega}_1^T \cdot \gamma' \cdot \left[\sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + 2 \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial q_j \partial t} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial t^2} \right].$$

В силу уравнений (3), (4) неравенство $\frac{dV}{dt} < 0$ принимает вид

$$G^{\mathrm{T}}\left[F(q,\dot{q}) + B(q,\dot{q}) \cdot f(\sigma)\right] + L' < 0. \tag{8}$$

Для придания процессу убывания V гарантированный характер в левую часть (8) введём некоторую заданную неотрицательную функцию $E(V)$, обращающуюся в нуль лишь при $V = 0$.

Тогда вместо (8) можем принять

$$\sum_{r=0}^{N} \psi_r \cdot u_r + L \le 0, \tag{9}$$

где $\psi^{\mathrm{T}} = G^{\mathrm{T}} \cdot B$; $\psi^{\mathrm{T}} = (\psi_1, ..., \psi_n)$; $L = G^{\mathrm{T}} \cdot F + L' + E$.

Примем

$$\sigma_r = \delta_r \cdot V,\ r = \overline{1,N}, \tag{10}$$

где δ_r – искомые функции.

Условие (9) будет выполнено, если выбрать

$$\sigma_r = -\delta_0 \cdot sign\psi_r, \tag{11}$$

где $sign\, a = \begin{cases} 1\,\text{при}\, a > 0, \\ -1\,\text{при}\, a < 0; \end{cases}$

δ_0 – положительная функция, удовлетворяющая условию

$$\sum_{r=1}^{N} |\psi_r| \cdot f_r(\delta_0 \cdot V) \ge L,\ \text{если}\ L > 0. \tag{12}$$

При $L < 0$ условие (9) выполняется и при $\delta_r = 0$, $r = \overline{1,N}$.

С учётом (4) можно утверждать, что условие (12) не нарушится, если функцию δ_0 определить из равенства

$$\sum_{r=1}^{N} |\psi_r| \cdot k_{1r} \cdot \delta_0 \cdot V = L,\ \text{если}\ L > 0$$

в виде

$$\delta_0 = \frac{1}{2}\frac{L}{V\cdot\sum_{r=1}^{N}\left|\psi_r\right|\cdot k_{1r}}\left(1+signL\right). \qquad (13)$$

Подставляя (13) в (11), а затем полученное выражение в (10), находим

$$\sigma_r = \frac{1}{2}\frac{L\left(1+signL\right)\cdot sign\psi_r}{\sum_{r=1}^{N}\left|\psi_r\right|\cdot k_{1r}} \; . \qquad (14)$$

Из (14) видно, что в общем случае на программном многообразии σ_r в нуль не обращается. С учётом (4) можно утверждать, что изображающая точка в пространстве $q,\dot{q}$ при управлении, вычисляемом по формуле (14), будет совершать колебательное движение, находясь в некоторой окрестности программного многообразия.

2. Теперь пусть программное многообразие задано в виде (2) и, кроме того, выполняется условие

$$\underset{q}{grad}\;\omega(q)\cdot F(q,\dot{q}) + \underset{q}{grad}\left[\underset{q}{grad}\;\omega(q)\cdot\dot{q}\right]\dot{q} = 0\,. \qquad (15)$$

То есть система управления манипулятора (7) при отсутствии управления обладает первыми интегралами (2).

В качестве вектора отклонений примем

$$\overline{\Omega}^T = \left(\omega_1 - c_1,\ldots,\omega_{S_2} - c_{S_2}\right).$$

Составим квадратичную форму

$$\overline{V}\left(\overline{\Omega},\dot{\overline{\Omega}}\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{\Omega}^{\mathrm{T}}\cdot\bar{\gamma}\cdot\overline{\Omega} + \dot{\overline{\Omega}}^{\mathrm{T}}\cdot\bar{\gamma}'\cdot\dot{\overline{\Omega}}\right), \qquad (16)$$

где $\dot{\overline{\Omega}} = \dfrac{d\overline{\Omega}}{dt}$; $\bar{\gamma} = diag\left\{\bar{\gamma}_1\ldots\bar{\gamma}_{S_2}\right\}$, $\bar{\gamma}' = diag\left\{\bar{\gamma}'_1\ldots\bar{\gamma}'_{S_2}\right\}$, $\bar{\gamma}_\lambda$ и $\bar{\gamma}'_\vartheta$, $\lambda,\vartheta = \overline{1,S_2}$ – положительные постоянные.

Применяя для решения задачи методику, предлагаемую в пункте 1, получим

$$\sigma_r = \frac{1}{2}\frac{\overline{L}\left(1 + sign\overline{L}\right)\cdot sign\overline{\psi}_r}{\sum_{r=1}^{N}\left|\psi_r\right|\cdot k_{1r}}, \qquad (17)$$

где $\overline{\psi}_r$, $r = \overline{1,N}$ – компоненты вектора $\overline{\psi}$,определяемого по формуле $\overline{\psi}_r = \overline{G}^T \cdot B$; $\overline{G}$ – ($N \times I$) – матрица с элементами

$$\overline{G}_\mu = \dot{\overline{\Omega}} \cdot \overline{\gamma}' \cdot \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial q_\mu}, \mu = \overline{1,N};$$

$$\overline{L} = \overline{\Omega}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\gamma} \cdot \dot{\overline{\Omega}} + \dot{\overline{\Omega}}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\gamma}'\left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial^2 \overline{\Omega}}{\partial q_j \cdot \partial q_k}\cdot \dot{q}_j \dot{q}_k\right) + \overline{G}^{\mathrm{T}} \cdot F + E\left(\overline{V}\right);$$

$E\left(\overline{V}\right)$ – неотрицательная функция, обращающаяся в нуль лишь при $\overline{V} = 0$.

В данном случае из (16) видно, что на программном многообразии $\sigma_r = 0$, $r = \overline{1,N}$.

Полная производная по времени форма $\overline{V}$ на решениях уравнений (3), (4) равна

$$\dot{\overline{V}} = \overline{\Omega}^T \cdot \overline{\gamma} \cdot \dot{\overline{\Omega}} + \dot{\overline{\Omega}} \cdot \overline{\gamma}' \cdot \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial q} \cdot B \cdot f(\sigma) + \dot{\overline{\Omega}} \cdot \overline{\gamma}' \cdot \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial q} \cdot F + \dot{\overline{\Omega}} \cdot \overline{\gamma}' \cdot \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial^2 \overline{\Omega}}{\partial q_j \cdot \partial q_k}\cdot \dot{q}_j \dot{q}_k,$$

где $\frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial q}$ – ($S_2 \times N$) – матрица с элементами $\frac{\partial \overline{\Omega}_i}{\partial q_j}$, $i = \overline{1,S_2}$; $j = \overline{1,N}$.

В силу условий (4), (15) при управлении, вычисляемом по формуле (16), $\dot{\overline{V}}$ является определённо отрицательной функцией.

Таким образом, если выполняется условие (15), то абсолютная устойчивость программного многообразия Ω_1 уравнения (7) будет иметь место при изменении входных сигналов управляющих органов согласно формулам (16).

Список литературы

1. *Лалетин В. И., Рычков В. В., Сбоев В. М.* Программное управление движениями манипуляционной системы // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 1-1. URL: http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=18776 (дата обращения: 01.02.2017).

2. *Рычков В. В.* Программные движения манипуляционных систем // Вестник Вятского научного центра Верхне-Волжского отд-ния Акад. технолог. наук РФ. Сер. «Проблемы обработки информации». Вып. 1(5)/2004. Киров: Вят. науч. центр, 2004. С. 102–106.

3. *Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 140 с.

РЫЧКОВ Владимир Викентьевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры электропривода и автоматизации промышленных установок, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: rychkov@vyatsu.ru