УДК 517.16

С. И. Калинин

АНАЛОГИ НЕРАВЕНСТВА ИЕНСЕНА ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ, ИХ НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Статья рассматривает так называемые аналоги неравенства Иенсена для выпуклых и логарифмически выпуклых в строгом или нестрогом смыслах функций. Аналогичные аналоги вводятся для строго или нестрого вогнутых и логарифмически вогнутых функций. В обосновании обсуждаемых нестрогих неравенств особое внимание уделяется вопросу достижения в них равенства. В качестве основного применения представляемых результатов доказываются новые неравенства типа классических неравенств Коши, Коши–Буняковского, Гюйгенса, Ки Фана. Некоторые из данных неравенств обосновываются двумя способами. Отмечается перспектива продуктивного использования таких неравенств при решении различных задач. Работа адресуется всем интересующимся вопросами выпуклых функций и тематикой неравенств. Ее результаты могут быть успешно использованы при организации исследовательской деятельности студентов и магистрантов математических направлений подготовки, в частности будущих учителей.

Ключевые слова: выпуклые, вогнутые функции; логарифмически выпуклые функции; логарифмически вогнутые функции; неравенство Иенсена, аналоги классических неравенств.

1. Неравенство Иенсена для выпуклых функций. Напомним определения понятий выпуклой и вогнутой функций на промежутке.

Пусть l – произвольный промежуток числовой прямой Ox и $f: l \to \mathbf{R}$ – функция, заданная на l.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *выпуклой* (*строго выпуклой*, *выпуклой вниз, строго выпуклой вниз*) на рассматриваемом промежутке, если для любого отрезка $[a;b]$, принадлежащего l, и любого числа λ, $\lambda \in (0;1)$, выполняется неравенство

$$f\left(\lambda a + (1-\lambda)b\right) < \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b). \qquad (1)$$

Определение 2. Функция $f(x)$ называется *вогнутой* (*строго вогнутой*, *выпуклой вверх, строго выпуклой вверх*) на l, если для любого отрезка $[a;b]$, принадлежащего l, и любого λ, $\lambda \in (0;1)$, выполняется неравенство

$$f\left(\lambda a + (1-\lambda)b\right) > \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b). \qquad (2)$$

Наряду с выпуклыми и вогнутыми функциями можно рассматривать также нестрого выпуклые и нестрого вогнутые функции.

Определение 3. Функцию $f(x)$ назовем *нестрого выпуклой* (*нестрого выпуклой вниз*) на промежутке l, если для любого отрезка $[a;b]$, $[a;b] \subset l$, и любого числа λ, $\lambda \in [0;1]$, выполняется неравенство

$$f\left(\lambda a + (1-\lambda)b\right) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b). \qquad (3)$$

Аналогично определяется понятие *нестрого вогнутой* (*нестрого выпуклой вверх*) на промежутке l функции. Оно будет характеризоваться неравенством

$$f\left(\lambda a + (1-\lambda)b\right) \geq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b), \qquad (4)$$

$$[a;b] \subset l,\ \lambda \in [0;1].$$

Для функции f, выпуклой на промежутке l в строгом или нестрогом смысле, справедливо следующее обобщающее (1) и (3) неравенство

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f\left(x_k\right) \qquad \left(x_k \in l; k = 1,...,n\right), \qquad (5)$$

где $\lambda_1,...,\lambda_n$ – положительные числа (связанные с числами $x_1,...,x_n$ весы), удовлетворяющие условию $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. Неравенство (5) называется *неравенством Иенсена* для рассматриваемой функции.

Ясно, что для вогнутой на промежутке l в строгом или нестрогом смысле функции f будет выполняться обобщающее (2) и (4) неравенство Иенсена

$$f\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right)\geq\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f\left(x_k\right)\qquad \left(x_k\in l;k=1,...,n\right),\tag{6}$$

где $\lambda_1,...,\lambda_n$ – снова положительные весы, удовлетворяющие условию $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=1$.

Подчеркнем, что если выпуклая или вогнутая (строго или нет) на промежутке l функция $f(x)$ не есть линейная функция, то для нее в неравенствах Иенсена (5) и (6) равенство будет достигаться лишь тогда, когда $x_1=...=x_n$.

С доказательством неравенства Иенсена (5) методом математической индукции можно познакомиться, например, по книгам [7], [5]. В статье [3] данное неравенство доказывается методом прямой и обратной индукции.

Особо отметим, что неравенство Иенсена для выпуклых и вогнутых функций позволяет обосновать многие классические неравенства, включая неравенства Коши, Коши–Буняковского, Гюйгенса, Ки Фана (см., к примеру, нашу работу [5]).

2. Аналог неравенства Иенсена. В данном пункте мы рассмотрим менее известное по сравнению с неравенством (5) неравенство, схожее однако с ним по своей структуре записи. Упоминаемое неравенство условимся *называть аналогом неравенства Иенсена*. Оно доставляется следующей теоремой.

Теорема 1. Пусть $f:l\to\mathbf{R}$ – выпуклая в строгом или нестрогом смысле на промежутке l функция; $[a;b]$ – произвольный отрезок, принадлежащий l; $x_1,...,x_n$ – произвольный кортеж чисел из этого отрезка; $\lambda_1,...,\lambda_n$ $(\lambda_1+...+\lambda_n=1)$ – произвольный набор положительных весов. В данных условиях справедливо неравенство

$$f\left(a+b-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right)\leq f(a)+f(b)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f\left(x_k\right),\tag{7}$$

в котором равенство достигается тогда и только тогда, когда или f – линейная функция, или все числа $x_1,...,x_n$ совпадают либо с a, либо с b.

Обоснование неравенства (7) содержится, например, в доказательстве теоремы 2 работы [1, с. 375]. Ниже мы воспользуемся схемой упоминаемого обоснования и доказательство неравенства (7) проведем подробно, уделяя тщательное внимание вопросу изучения условий достижения в нем равенства.

Отметим также, что если f – вогнутая в строгом или нестрогом смысле на промежутке l функция, то для нее будет иметь место неравенство

$$f\left(a+b-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right)\geq f(a)+f(b)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k), \qquad (8)$$

$$[a;b]\in l\,;\ x_k\in l\,,\ \lambda_k>0\ \ (k=1,...,n)\,;\ \lambda_1+...+\lambda_n=1.$$

Условия достижения равенства в (8) будут те же, что и в (7).

3. Доказательство неравенства (7). Установим сначала следующую вспомогательную лемму методом работы [6].

Лемма 1. Если функция f выпукла на отрезке $[a;b]$ в строгом или нестрогом смысле, то для любого x, принадлежащего этому отрезку, будет выполняться неравенство

$$f(a+b-x)\leq f(a)+f(b)-f(x), \qquad (9)$$

в котором равенство достигается только тогда, когда или функция f – линейная, или $x\in\{a,b\}$.

Доказательство. Отметим, во-первых, что точка $a+b-x$ принадлежит отрезку $[a;b]$. Это следует из цепочки неравенств:

$$a\leq x\leq b\Leftrightarrow -a\geq -x\geq -b\Leftrightarrow b\geq a+b-x\geq a\,.$$

Значит, значение $f(a+b-x)$ в левой части неравенства (9) существует, а само это неравенство по записи корректно.

Из включения $x\in[a;b]$ следует, что существует $\lambda, \lambda\in[0;1]$, такое, что будет иметь место представление $x=\lambda a+(1-\lambda)b$. Выразим через λ значение $a+b-x$:

$$a+b-x=(1-\lambda)a+\lambda b\,.$$

Тогда в силу выпуклости функции f будем иметь:

$$f(a+b-x)=f((1-\lambda)a+\lambda b)\leq(1-\lambda)f(a)+\lambda f(b)= \qquad (10)$$

$$=f(a)+f(b)-\lambda f(a)-(1-\lambda)f(b)\leq f(a)+f(b)-f(\lambda a+(1-\lambda)b)= \qquad (11)$$

$$= f(a) + f(b) - f(x).$$

Неравенство (9) доказано.

Выясним условия достижения равенства в нем. Для этого следует осмыслить условия достижения равенства в (10) и (11).

Если f – линейная функция, то, легко видеть, равенство достигается и в оценке (10), и в оценке (11). Если же f не является линейной функцией, то в каждой из данных оценок равенство возможно лишь при $\lambda = 0$ или $\lambda = 1$, то есть при совпадении x с b или a. Соотношение (9) полностью обосновано, лемма 1 доказана.

Установим сейчас неравенство (7). Для этого сначала отметим, что значение $f\left(a + b - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right)$ существует, поскольку весовое среднее $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ чисел $x_1, ..., x_n$ есть точка из отрезка $[a;b]$. Оценим значение $f\left(a + b - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right)$ сверху, используя неравенство Иенсена (5) для выпуклых функций. Будем иметь:

$$f\left(a + b - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left(a + b - x_k\right)\right) \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f\left(a + b - x_k\right). \qquad (12)$$

Но в силу леммы 1

$$f\left(a + b - x_k\right) \le f(a) + f(b) - f(x_k),\ k = 1, ..., n. \qquad (13)$$

Значит,

$$f\left(a + b - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left(f(a) + f(b) - f\left(x_k\right)\right) = f(a) + f(b) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f\left(x_k\right),$$

то есть само соотношение (7) установлено. Ясно, что равенство в нем будет достигаться только тогда, когда оно будет иметь место и в неравенстве (12), и в неравенствах (13). В случае линейности функции f отмеченное условие, легко проверить, выполняется. Если же f не является линейной функцией, то в (12) равенство может достигаться только при условии

$$a + b - x_1 = ... = a + b - x_n, \qquad (14)$$

а в неравенствах (13) – при условии $x_k \in \{a,b\}$, $k=1,...,n$. Но из (14) следует, что $x_1 = ... = x_n$, значит, в рассматриваемой ситуации нелинейности *f* должно быть: или $x_1 = ... = x_n = a$, или $x_1 = ... = x_n = b$. Неравенство (7) полностью обосновано, теорема 1 доказана.

Приведем одно следствие теоремы 1.

Следствие 1. Пусть $f : l \to \mathbf{R}$ – выпуклая в строгом или нестрогом смысле на промежутке *l* функция; $x_1,...,x_n$ –произвольный набор чисел из этого промежутка, перенумерованных в порядке неубывания; $\lambda_1,...,\lambda_n$ $(\lambda_1 + ... + \lambda_n = 1)$ – произвольный набор положительных весов. Тогда справедливо неравенство

$$f\left(x_1 + x_n - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \le f(x_1) + f(x_n) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k), \tag{15}$$

в котором равенство достигается только в случаях:1) *f* – линейная функция; 2) $x_1 = ... = x_n$.

Доказательство этого утверждения, легко видеть, следует из теоремы 1, если в ней положить $a = x_1, b = x_n$.

Замечание 1. Требование монотонности последовательности $x_1,...,x_n$ в условиях следствия 1, очевидно, можно заменить таким: в данной последовательности $x_1 = \min_{1\le k\le n}\{x_k\}$, $x_n = \max_{1\le k\le n}\{x_k\}$.

Ясно, что если в условиях следствия 1 функция *f* будет вогнутой (строго или нет) на промежутке *l*, то для нее справедливо неравенство

$$f\left(x_1 + x_n - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \ge f(x_1) + f(x_n) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k). \tag{16}$$

Условия достижения равенства в (16) те же, что и для неравенства (15).

4. Неравенства типа неравенств Коши, Ки Фана, Гюйгенса, Коши–Буняковского. Пусть для промежутка *l* выполняется включение $l \subset (0;+\infty)$. Положим $\widehat{A}_n = x_1 + x_n - A_n$, $\widehat{G}_n = \dfrac{x_1 x_n}{G_n}$, где $A_n = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n$, $G_n = x_1^{\lambda_1} \cdot ... \cdot x_n^{\lambda_n}$ – весовые средние арифметическое и геометрическое чисел $x_1,...,x_n$ из *l* с весами

$\lambda_1,...,\lambda_n$ $(\lambda_1+...+\lambda_n=1)$. Мы считаем, что рассматриваемые числа перенумерованы в порядке неубывания. Хорошо известно, что для величин A_n, G_n справедливо неравенство Коши $G_n \le A_n$. Покажем, что имеет место *аналог* данного неравенства для величин $\widehat{A}_n, \widehat{G}_n$ – неравенство

$$\widehat{G}_n \le \widehat{A}_n, \tag{17}$$

в котором равенство (как и в неравенстве Коши) достигается тогда и только тогда, когда $x_1=...=x_n$.

Для доказательства (17) применим неравенство (16) к функции $f(x)=\ln x$, вогнутой на интервале $(0;+\infty)$:

$$\ln\left(x_1+x_n-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right) \ge \ln(x_1)+\ln(x_n)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k \ln(x_k)=\ln\frac{x_1 x_n}{x_1^{\lambda_1}\cdot...\cdot x_n^{\lambda_n}}.$$

Отсюда следует (17).

Так как функция $\ln x$ не является линейной, то равенство в (17) может достигаться только при условии $x_1=...=x_n$. Неравенство (17) полностью обосновано.

Пусть сейчас числа $x_1,...,x_n$ принадлежат промежутку $\left(0;\frac{1}{2}\right]$. На данном промежутке функция $f(x)=\ln\frac{1-x}{x}$ является выпуклой, ибо внутри промежутка ее вторая производная положительна. Применим к ней неравенство (15), будем иметь:

$$\ln\frac{1-x_1-x_n+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k}{x_1+x_n-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k} \le \ln\frac{1-x_1}{x_1}+\ln\frac{1-x_n}{x_n}-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k \ln\frac{1-x_k}{x_k}.$$

Заметим, что левая часть полученного неравенства преобразуется к виду $\ln\frac{\widehat{A}'_n}{\widehat{A}_n}$, где $\widehat{A}'_n=(1-x_1)+(1-x_n)-\lambda_1(1-x_1)-...-\lambda_n(1-x_n)$, а правая – к виду $\ln\frac{\widehat{G}'_n}{\widehat{G}_n}$, где

$\widehat{G}'_n = \dfrac{(1-x_1)(1-x_n)}{x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}}$. Следовательно, справедливо неравенство $\dfrac{\widehat{A}'_n}{\widehat{A}_n} \le \dfrac{\widehat{G}'_n}{\widehat{G}_n}$, или неравенство

$$\frac{\widehat{G}_n}{\widehat{G}'_n} \le \frac{\widehat{A}_n}{\widehat{A}'_n}. \tag{18}$$

Неравенство (18) есть *аналог* неравенства Ки Фана $\dfrac{G_n}{G'_n} \le \dfrac{A_n}{A'_n}$ для арифметико-геометрических средних A_n, G_n и аналогичных средних A'_n, G'_n чисел $1-x_1,\ldots,1-x_n$ с тем же набором весов.

Очевидно, равенство в неравенстве (18) будет достигаться только, если $x_1 = \ldots = x_n$, поскольку функция $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{x}$ не является линейной.

Замечание 2. С различными доказательствами неравенств Коши и Ки Фана читатель может познакомиться, напр., по работе [5].

Перейдем сейчас к рассмотрению аналога обобщенного неравенства Гюйгенса. Напомним, что обобщенным неравенством Гюйгенса для положительных чисел $a_1,\ldots,a_n$ с набором положительных весов $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ $(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1)$ называется неравенство

$$1 + a_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{\lambda_n} \le (1+a_1)^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot (1+a_n)^{\lambda_n}, \tag{19}$$

в котором равенство достигается только при условии $a_1 = \ldots = a_n$.

Для получения упоминаемого выше аналога неравенства (19) введем в рассмотрение функцию $f(x) = \ln(1+e^x)$. Легко проверить, что она выпукла на всей числовой прямой. Применим к ней неравенство (15) для произвольных действительных чисел $x_1,\ldots,x_n$, перенумерованных в порядке неубывания, и обычного набора весов $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ $(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1)$:

$$\ln\left(1 + e^{x_1 + x_n - \sum_{k=1}^{n}\lambda_k}\right) \le \ln(1+e^{x_1}) + \ln(1+e^{x_n}) - \sum_{k=1}^{n}\lambda_k \ln(1+e^{\lambda_k}).$$

Полученное неравенство, нетрудно видеть, равносильно неравенству

$$1+\frac{e^{x_1}e^{x_n}}{e^{x_1}\cdot\ldots\cdot e^{x_n}}\le\frac{\left(1+e^{x_1}\right)\left(1+e^{x_n}\right)}{\left(1+e^{x_1}\right)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\left(1+e^{x_n}\right)^{\lambda_n}}. \qquad (20)$$

Полагая $a_k=e^{x_k}$, $k=1,\ldots,n$, неравенство (20) можно переписать в виде

$$1+\frac{a_1a_n}{a_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot a_n^{\lambda_n}}\le\frac{\left(1+a_1\right)\left(1+a_n\right)}{\left(1+a_1\right)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\left(1+a_n\right)^{\lambda_n}}. \qquad (21)$$

В неравенстве (21) числа $a_1,\ldots,a_n$ перенумерованы в порядке неубывания: $0<a_1\le\ldots\le a_n$.

Поскольку в (20) равенство достигается только при совпадении чисел $x_1,\ldots,x_n$, то в (21) оно будет достигаться только при совпадении чисел $a_1,\ldots,a_n$.

Неравенство (21) мы и называем *аналогом* неравенства Гюйгенса.

Выведем, наконец, аналог неравенства Коши–Буняковского, которое, как известно, имеет вид

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\le\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right),$$

$$a_k\in\mathbf{R},\ b_k\in\mathbf{R},\ b_k\ne0,\ k=1,\ldots,n,$$

где равенство достигается лишь тогда, когда $\frac{a_1}{b_1}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$.

Для реализации намеченной цели применим неравенство (7) к выпуклой на числовой прямой функции $f(x)=x^2$. Будем иметь соотношение

$$\left(x_1+x_n-\sum_{k=1}^{n}\lambda_kx_k\right)^2\le x_1^2+x_n^2-\sum_{k=1}^{n}\lambda_kx_k^2, \qquad (23)$$

где $x_1\le x_k\le x_n$, $k=2,\ldots,n-1$; $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ $(\lambda_1+\ldots+\lambda_n=1)$ – положительные весы.

Положим в (23) $x_k=\frac{a_k}{b_k}$, $\lambda_k=\frac{b_k^2}{b_1^2+\ldots+b_n^2}$, $k=1,\ldots,n$, требуя от чисел $a_k\in$ **R**, $b_k\in\mathbf{R}$, $b_k\ne0$, обеспечения условия $x_1\le x_k\le x_n$, $k=2,\ldots,n-1$. Тогда это неравенство приводится к виду

$$\left(\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_n}{b_n}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)-\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2 \le \left(\frac{a_1^2}{b_1^2}+\frac{a_n^2}{b_n^2}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_n^2\right)^2-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right). \quad (24)$$

Неравенство (24) мы и называем *аналогом* неравенства Коши–Буняковского. Подчеркнем, в этом неравенстве кортежи действительных чисел $a_k \in \mathbf{R}$, $b_k \in \mathbf{R}$, $b_k \ne 0$, $k=1,...,n$, подчинены условию $\frac{a_1}{b_1} \le \frac{a_k}{b_k} \le \frac{a_n}{b_n}$, $k=2,...,n-1$. Равенство в нем будет достигаться только, если $\frac{a_1}{b_1} = ... = \frac{a_n}{b_n}$.

Замечание 3. Вопросам применения представленных здесь аналогов классических неравенств при решении задач мы намерены посвятить отдельную работу.

5. Неравенство Иенсена для логарифмически выпуклых функций. Напомним понятия логарифмически выпуклой и логарифмически вогнутой функций. Пусть снова $f: l \to \mathbf{R}$ – заданная на промежутке l числовой прямой Ox функция.

Определение 5. Функция $f(x)$ называется *логарифмически выпуклой* (*строго логарифмически выпуклой*) если в точках l она принимает только положительные значения и ее логарифм $\ln f(x)$ является выпуклой на рассматриваемом промежутке функцией.

Определение 6. Функцию $f(x)$ условимся называть *логарифмически вогнутой* (*строго логарифмически вогнутой*), если в точках l она положительна и ее логарифм $\ln f(x)$ есть вогнутая на l функция.

Нетрудно видеть, что аналогами неравенств (1)–(2) для логарифмически выпуклой или логарифмически вогнутой на промежутке l функции $f(x)$ являются соответственно неравенства

$$f\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right) < f^{\lambda}(a)\, f^{1-\lambda}(b), \quad (25)$$

$$f\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right) > f^{\lambda}(a)\, f^{1-\lambda}(b), \quad (26)$$

$$[a;b] \subset l,\ \lambda \in (0;1).$$

Аналогично неравенства

$$f\big(\lambda a+(1-\lambda)b\big)\le f^{\lambda}(a)\,f^{1-\lambda}(b), \qquad (27)$$

$$f\big(\lambda a+(1-\lambda)b\big)\ge f^{\lambda}(a)\,f^{1-\lambda}(b), \qquad (28)$$

$$[a;b]\subset l,\ \lambda\in[0;1],$$

будут характеризовать соответственно нестрого логарифмически выпуклую и нестрого логарифмически вогнутую на l функцию f.

С основными свойствами логарифмически выпуклых функций читатель может познакомиться по работе [2]. В пособии [4] рассмотрено использование логарифмически выпуклых функций в вопросе доказательства неравенств и решения уравнений.

Если функция f является логарифмически выпуклой в строгом или нестрогом смысле на промежутке l, то для нее справедливо *неравенство Иенсена*

$$f\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right)\le\prod_{k=1}^{n} f^{\lambda_k}(x_k),\ \ x_k\in l,\ \ \lambda>0\ \ (k=1,\ldots,n),\ \ \sum_{k=1}^{n}\lambda_k=1, \qquad (29)$$

в котором равенство достигается лишь тогда, когда f есть экспоненциальная функция вида $\beta e^{\alpha x}$ $(\beta>0,\alpha\in\mathbf{R})$ или когда $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

Данное неравенство легко обосновать – достаточно применить неравенство Иенсена (5) к выпуклой на промежутке l функции $\ln f(x)$.

Очевидно, что для логарифмически вогнутой (строго или нет) на промежутке l функции будет выполняться неравенство Иенсена

$$f\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right)\ge\prod_{k=1}^{n} f^{\lambda_k}(x_k),\ x_k\in l,\ \ \lambda>0\ \ (k=1,\ldots,n),\ \ \sum_{k=1}^{n}\lambda_k=1, \qquad (30)$$

получающееся из (29) заменой знака неравенства «$\le$» на знак «$\ge$». В (30) равенство снова будет иметь место только тогда, когда f есть экспоненциальная функция вида $\beta e^{\alpha x}$ $(\beta>0,\alpha\in\mathbf{R})$ или когда $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

Легко видеть, что неравенство Иенсена (29) обобщает неравенства (25) и (27), а неравенство (30) – неравенства (26) и (28).

6. Аналог неравенства Иенсена для логарифмически выпуклой функции. Установим следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $f: l \to \mathbf{R}$ – логарифмически выпуклая в строгом или нестрогом смысле на промежутке l функция; $[a;b]$ – произвольный отрезок, принадлежащий l; $x_1,...,x_n$ – произвольный кортеж чисел из этого отрезка; $\lambda_1,...,\lambda_n$ $(\lambda_1 + ... + \lambda_n = 1)$ – произвольный набор положительных весов. В приведенных условиях справедливо неравенство

$$f\left(a + b - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \le \frac{f(a) f(b)}{\prod\limits_{k=1}^{n} f^{\lambda_k}(x_k)}, \tag{31}$$

в котором равенство достигается тогда и только тогда, когда или f – экспоненциальная функция вида $\beta e^{\alpha x}$ ($\beta > 0, \alpha \in \mathbf{R}$), или все числа $x_1,...,x_n$ совпадают либо с a, либо с b.

Доказательство. Применим аналог неравенства Иенсена (7) к выпуклой функции $\ln f(x)$, будем иметь неравенство

$$\ln f\left(a + b - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \le \ln f(a) + \ln f(b) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \ln f(x_k), \tag{32}$$

которое равносильно неравенству (31). Равенство в (32) достигается только в двух случаях: 1) функция $\ln f(x)$ – линейная, то есть $\ln f(x) = \alpha x + \gamma$, откуда следует $f(x) = e^{\gamma} e^{\alpha x} = \beta e^{\alpha x}$; 2) $x_1 = ... = x_n$. Значит, только в этих условиях будет достигаться равенство в (31).

Теорема 2 полностью доказана.

Замечание 4. Доказанная теорема позволяет сформулировать также следующее утверждение: если f – логарифмически вогнутая в строгом или нестрогом смысле на промежутке l функция, то для нее будет иметь место неравенство

$$f\left(a + b - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \ge \frac{f(a) f(b)}{\prod\limits_{k=1}^{n} f^{\lambda_k}(x_k)}, \tag{33}$$

$$[a;b]\in l;\ x_k\in l,\ \lambda_k>0\ (k=1,...,n);\ \lambda_1+...+\lambda_n=1.$$

Условия достижения равенства в (33) – те же, что и в (31).

Теорема 2 имеет

Следствие 2. Пусть $f: l\to \mathbf{R}$ – логарифмически выпуклая в строгом или нестрогом смысле на промежутке l функция; $x_1,...,x_n$ – произвольный набор чисел из этого промежутка, в котором $x_1=\min\limits_{1\le k\le n}\{x_k\}$, $x_n=\max\limits_{1\le k\le n}\{x_k\}$; $\lambda_1,...,\lambda_n$ $(\lambda_1+...+\lambda_n=1)$ – произвольный набор положительных весов. Тогда справедливо неравенство

$$f\left(x_1+x_n-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right)\le \frac{f(x_1)f(x_n)}{\prod\limits_{k=1}^{n} f^{\lambda_k}(x_k)}, \tag{34}$$

в котором равенство достигается только в случаях:1) f – экспоненциальная функция вида $\beta e^{\alpha x}$ $(\beta>0, \alpha\in\mathbf{R})$;; 2) все числа $x_1,...,x_n$ совпадают либо с a, либо с b.

Если в условиях следствия 1 f – логарифмически вогнутая в строгом или нестрогом смысле на промежутке l функция, то будет выполняться неравенство

$$f\left(x_1+x_n-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right)\ge \frac{f(x_1)f(x_n)}{\prod\limits_{k=1}^{n} f^{\lambda_k}(x_k)} \tag{35}$$

с теми же условиями достижения в нем равенства, что и в (34).

Замечание 5. Неравенства (17) и (18), которые мы назвали выше аналогами классических неравенств Коши и Ки Фана соответственно, с помощью неравенств (35) и (34) могут быть обоснованы совсем просто. Для этого данные неравенства надо применить к логарифмически вогнутой функции $f(x)=x$, $x>0$, и логарифмически выпуклой функции $f(x)=\dfrac{1-x}{x}$, $x\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right]$. Применение неравенства (35) сразу дает неравенство (17), а применение неравенства (34) приводит к неравенству $\dfrac{\widehat{A}'_n}{\widehat{A}_n}\le\dfrac{\widehat{G}'_n}{\widehat{G}_n}$, равносильному (18).

С помощью логарифмически выпуклой функции $f(x)=1+e^x$ можно обосновать и аналог неравенства Гюйгенса (21).

Список литературы

1. *Abramovich S., Klaričić Bakula M., Matić M., Pečarić J.* A variant of Jensen–Steffensen's inequality and quasi-arithmetic means, J. Math. Anal. Applics. 2005. № 307. P. 370–385.

2. *Аносов Д. В.* О сумме логарифмически выпуклых функций // Математическое просвещение. 2001. Сер. 3. Вып. 5. С. 158–163.

3. *Вычегжанин С. В.* Доказательство неравенства Иенсена методом прямой и обратной индукции // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Вып. 15: периодич. межвуз. сб. науч.-метод. работ. Киров : Изд-во ООО «Радуга-ПРЕСС», 2013. С. 166–172.

4. *Калинин С. И.* Метод неравенств решения уравнений : учеб. пособие по элективному курсу для классов физ.-мат. профиля. М. : Изд-во «Моск. лицей», 2013. 112 с.

5. *Калинин С. И.* Средние величины степенного типа. Неравенства Коши и Ки Фана : учеб. пособие по спецкурсу. Киров : Изд-во ВГГУ, 2002. 368 с.

6. *Mercer A. McD.* A variant of Jensen's inequality. J. Inequal. In Pure and Appl. Math., 2003.Vol. 4. Issue 4. Article 73. 1–2.

7. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М. : Наука, 1966. 607 с.

КАЛИНИН Сергей Иванович – доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры фундаментальной и компьютерной математики, Вятский государственный университет. 610000, г. Киров, ул. Московская, 36.

E-mail: kalinin_gu@mail.ru