УДК 624.04 DOI 10.25730/VSU.0536.19.045

Моделирование статической реакции балки на нелинейно упругом основании

В. М. Шишкин
доктор технических наук, профессор кафедры теоретической и строительной механики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: tism1@rambler.ru

Аннотация. Разработана конечно-элементная методика моделирования статической реакции произвольно нагруженных балок, лежащих на нелинейно упругом винклеровском основании, с использованием балочного конечного элемента, работающего в рамках классических гипотез Кирхгофа-Лява. Для получения уравнений равновесия конечного элемента используется принцип возможных перемещений. Построена мгновенная матрица жесткости конечного элемента балки на нелинейно упругом основании, зависящая от текущего прогиба центра элемента. Получена система квазилинейных разрешающих уравнений для определения статической реакции балки на нелинейно упругом основании. Предложен быстро сходящийся итерационный алгоритм решения полученной системы уравнений. Разработана универсальная программа определения напряженно-деформированного состояния балок на нелинейно упругом основании на встроенном языке программирования пакета компьютерной математики MATLAB. Проведены численные эксперименты, подтверждающие достоверность разработанной конечно-элементной методики.

Ключевые слова: балка, упругое основание, конечный элемент, итерационный алгоритм.

Балки на упругом основании широко применяются в современных инженерных конструкциях различного назначения. Классификация данных балок включает как принимаемые условно за бесконечно длинные балки типа сварных рельсов, так и балки конечной длины. В строительстве расчет многих типов фундаментов сводится к расчету балок на упругом основании. В транспортном строительстве к таким конструкциям относятся, например, водопропускные трубы, подводные тоннели на стадии их эксплуатации, а также различные виды трубопроводов. При расчете балок на упругом основании обычно считается, что погонная реакция основания $R(w)$ линейно зависит от прогиба балки w [1; 2]. Однако в некоторых случаях, например, при определении реакции грунта в случае больших деформаций, такая зависимость может быть нелинейной. Имеющие аналитические методы расчета балок на нелинейно упругом основании ограничиваются рамками каких-либо частных случаев нагружения и только определенными видами зависимости $R(w)$.

Предлагается общий подход к расчету балок на нелинейном упругом основании, состоящий на применении метода конечных элементов (МКЭ) и итерационных методов решения получаемых при этом систем разрешающих уравнений, свободный от каких-либо ограничений на характер зависимости $R(w)$ и условий нагружения балки. На рис. 1 представлен балочный конечный элемент, лежащий на упругом основании. Считается, что упругое основание является винклеровским, т. е. любая часть основания работает независимо от других частей. На элемент действует распределенная нагрузка $q(x)$. Узловые перемещения элемента определяются вектором $\{r^{(e)}\} = \{w_1 \ \varphi_1 \ w_2 \ \varphi_2\}$, где $w_1, w_2, \varphi_1, \varphi_2$ – прогибы и углы поворота его узлов. Элемент работает в рамках классических гипотез Кирхгофа-Лява [3]. Жесткость EI элемента при изгибе в пределах его длины l считается постоянной.

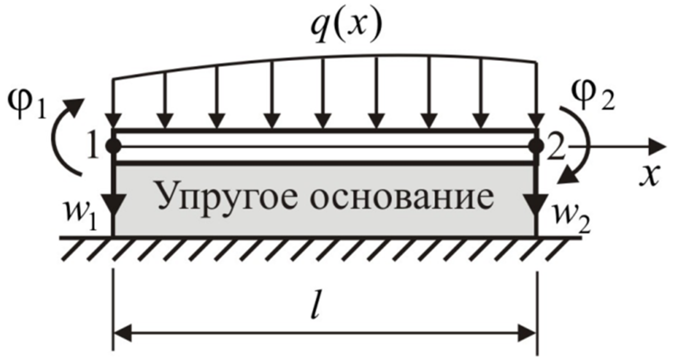

Рис. 1. Балочный конечный элемент на упругом основании

Аппроксимируем прогиб *w* в пределах элемента зависимостью

$$w = \{N\}^T \{r^{(e)}\}, \qquad (1)$$

где $\{N\} = \{N_1\ N_2\ N_3\ N_4\}$ – базисные функции:

$$N_1 = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3};\ N_2 = x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2};$$

$$N_3 = \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3};\ N_4 = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}.$$

Для получения уравнений равновесия конечного элемента воспользуемся принципом возможных перемещений:

$$\delta A = \delta A_M + \delta A_q + \delta A_R = 0. \qquad (2)$$

Здесь δA_M, δA_q, δA_R – соответственно возможная работа изгибающих моментов *M*, нагрузки $q(x)$ и погонной реакции основания $R(w)$ в деформированном состоянии элемента. Величина δA_M определяется выражением

$$\delta A_M = -\int_0^l \delta\chi M dx, \qquad (3)$$

где χ – кривизна оси в произвольном сечении элемента. Далее воспользуемся известными зависимостями

$$\chi = w'',\ M = EI\chi.$$

Подставляя сюда аппроксимацию (1), получаем

$$\chi = \{N''\}^T \{r^{(e)}\},\ M = EI\{N''\}^T \{r^{(e)}\}.$$

С учетом этого выражение (3) принимает вид

$$\delta A_M = -\{\delta r^{(e)}\}^T \int_0^l \{N''\}\{N''\}^T dx \{r^{(e)}\}$$

или

$$\delta A_M = -\{\delta r^{(e)}\}^T [K^{(e)}] \{r^{(e)}\}, \qquad (4)$$

где

$$[K^{(e)}] = EI\int_0^l \{N''\}\{N''\}^T dx = EI\begin{bmatrix} 12/l^3 & 6/l^2 & -12/l^3 & 6/l^2 \\ 6/l^2 & 4/l & -6/l^2 & 2/l \\ -12/l^3 & -6/l^2 & 12/l^3 & -6/l^2 \\ 6/l^2 & 2/l & -6/l^2 & 4/l \end{bmatrix}$$ – матрица жесткости элемента балки.

Найдем возможную работу нагрузки $q(x)$:

$$\delta A_q = \int_0^l \delta w q(x) dx.$$

С учетом аппроксимации (1) получаем

$$\delta A_q = \{\delta r^{(e)}\}^T \int_0^l \{N\} q(x) dx. \qquad (5)$$

Будем считать, что нагрузка $q(x)$ распределена в пределах элемента по линейному закону:

$$q(x) = \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix};\ H_1 = 1 - \frac{x}{l};\ H_2 = \frac{x}{l}.$$

Здесь q_1, q_2 – значения $q(x)$ в узлах 1, 2 элемента. С учетом этого выражение (5) можно привести к виду

$$\delta A_q = \{\delta r^{(e)}\}^T \{P^{(e)}\}, \qquad (6)$$

где

$$\{P^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ m_1 \\ P_2 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \int_0^l \{N\} \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{Bmatrix}^T dx \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \frac{l}{60} \begin{bmatrix} 21 & 9 \\ 3l & 2l \\ 9 & 21 \\ -2l & -3l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$ – вектор внешних узловых сил элемента от нагрузки $q(x)$.

Найдем возможную работу погонной реакции основания $R(w)$:

$$\delta A_R = -\int_0^l \delta w R(w) dx.$$

Подставляя сюда аппроксимацию (1), получаем

$$\delta A_R = -\{\delta r^{(e)}\}^T \int_0^l \{N\} R(w) dx.$$

Введем величину $\widetilde{R}(w) = R(w)/w$. С учетом этого и аппроксимации (1) последнее выражение можно представить в виде

$$\delta A_R = -\{\delta r^{(e)}\}^T \int_0^l \widetilde{R}(w) \{N\} \{N\}^T dx \{r^{(e)}\}. \qquad (7)$$

Для балки на нелинейно упругом основании величина $\widetilde{R}(w)$ в пределах элемента нелинейно зависит от прогиба *w*, а он по кубическому зависит от координаты *x* произвольной точки элемента и определяется его узловыми перемещениями $\{r^{(e)}\}$. Поэтому вопрос вычисления определенного интеграла в (7) является проблематичным. Чтобы обойти эту трудность, будем считать, что величина $\widetilde{R}(w)$ в пределах элемента постоянна и равна ее значению $\widetilde{R}(w_c) = R(w_c)/w_c$ в середине элемента. Прогиб w_c вычисляется на основании (1) при $x = l/2$:

$$w_c = \{N(l/2)\}^T \{r^{(e)}\} = \{1/2 \;\; l/8 \;\; 1/2 \; -l/8\}^T \{r^{(e)}\}.$$

Тогда вместо (7) можно записать

$$\delta A_R = -\{\delta r^{(e)}\}^T \widetilde{R}(w_c) \int_0^l \{N\} \{N\}^T dx \{\delta r^{(e)}\}.$$

Последнее выражение можно привести к виду

$$\delta A_R = -\{\delta r^{(e)}\}^T [\widetilde{K}^{(e)}] \{r^{(e)}\}, \qquad (8)$$

где

$$[\widetilde{K}^{(e)}] = \widetilde{R}(w_c) \int_0^l \{N\} \{N\}^T dx = \widetilde{R}(w_c) \begin{bmatrix} 13l/35 & 11l^2/210 & 9l/70 & -13l^2/420 \\ 11l^2/210 & l^3/105 & 13l^2/420 & -l^3/140 \\ 9l/70 & 13l^2/420 & 13l/35 & -11l^2/210 \\ -13l^2/420 & -l^3/140 & -11l^2/210 & l^3/105 \end{bmatrix}$$ –

мгновенная матрица жесткости элемента нелинейно упругого основания, зависящая от текущего прогиба w_c (если основание оказывает сопротивление изгибу балки только в области положительных значений *w*, т. е. является односторонним, то при $w_c \le 0$ матрица $[\widetilde{K}^{(e)}]$ считается нулевой).

Подставляя (4), (6) и (8) в уравнение (2), получаем

$$-\{\delta r^{(e)}\}^T [K^{(e)}] \{r^{(e)}\} + \{\delta r^{(e)}\}^T \{P^{(e)}\} - \{\delta r^{(e)}\}^T [\widetilde{K}^{(e)}] \{r^{(e)}\} = 0.$$

Отсюда при условии $\{\delta r^{(e)}\} \neq 0$ и независимости компонент вектора $\{r^{(e)}\}$ следуют уравнения равновесия конечного элемента

$$([K^{(e)}] + [\widetilde{K}^{(e)}]\{r^{(e)}\} = \{P^{(e)}\}.$$

Объединяя данные уравнения по направлениям общих для смежных элементов узловых перемещений, получаем систему разрешающих уравнений

$$([K] + [\widetilde{K}]\{r\} = \{P\}, \tag{9}$$

где $[K]$, $[\widetilde{K}]$, $\{r\}$, $\{P\}$ – соответственно матрица жесткости конечно-элементной модели балки, мгновенная матрица жесткости нелинейно упругого основания, вектор узловых перемещений и вектор внешних узловых сил (вектор нагрузки) отмеченной модели.

Необходимо заметить, что матрица $[\widetilde{K}]$ зависит от прогибов центров конечных элементов, которые на момент формирования системы (9) еще неизвестны. Поэтому данную систему необходимо решать методом последовательных приближений. Для этого можно рекомендовать итерационный алгоритм

$$([K] + [\widetilde{K}]_i)\{r\}_{i+1} = \{P\}, \tag{10}$$

где i – номер текущей итерации. Алгоритм стартует при значении i = 0 и некотором ненулевом начальном векторе $\{r\}_0$, при котором формируется матрица $[\widetilde{K}]_0$. Затем из системы (10) находятся узловые перемещения $\{r\}_1$, при которых формируется матрица $[\widetilde{K}]_1$, затем снова решается система (10) и т. д. Итерации продолжаются до выполнения условия

$$D = \left\| \{r\}_{i+1} - \{r\}_i \right\|_2^2 \Big/ \left\| \{r\}_{i+1} \right\|_2^2 \le \varepsilon, \tag{11}$$

где $\left\| \{r\}_{i+1} - \{r\}_i \right\|_2^2$, $\left\| \{r\}_{i+1} \right\|_2^2$ – квадраты вторых норм соответствующих векторов [3], ε – заданная точность.

В качестве примера рассматривается балка на сплошном нелинейно упругом основании (рис. 2) при действии погонной нагрузки $q = 1{,}4\ \text{кН/м}$ и сосредоточенных сил $P_1 = 7{,}2\ \text{кН}$, $P_2 = 17{,}5\ \text{кН}$, приложенных на расстояниях $x_1 = 1{,}78\ \text{м}$ и $x_2 = 4{,}89\ \text{м}$ от левого конца балки. Длина балки L = 8 м, жесткость на изгиб $EI = 28500 \cdot 10^3\ \text{кН} \cdot \text{м}^2$. Погонная реакция упругого основания зависит от прогиба w по закону $R(w) = 72w + 3425w^2$ кН/м (прогиб w задается в метрах). Балка моделируется 72 элементами одинаковой длины.

Система (9) решалась методом последовательных приближений с использованием описанного выше итерационного алгоритма (10) при точности $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-9}$. В качестве начального приближения использовался единичный вектор $\{r\}_0$. Для достижения заданной точности потребовалось 22 итерации.

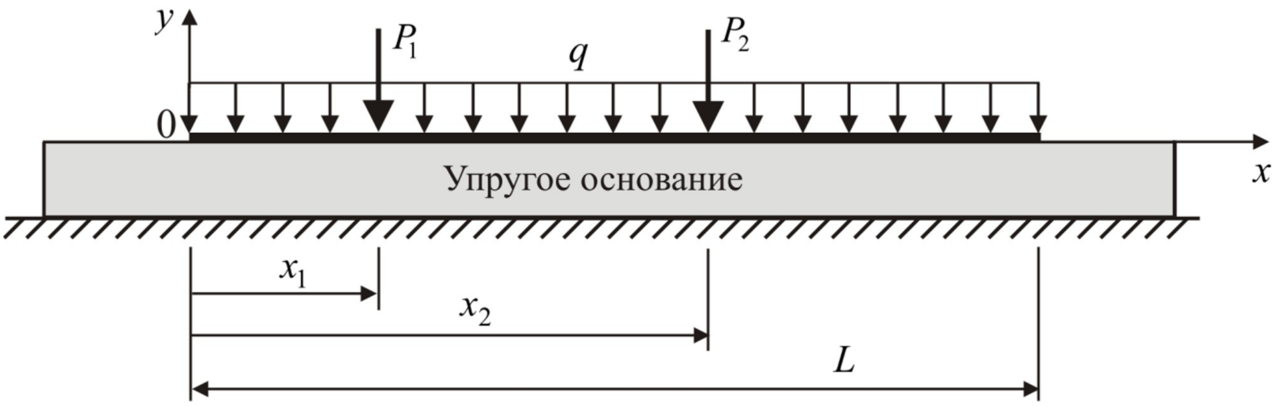

Рис. 2. Расчетная схема балки

На рис. 3–6 представлены эпюры прогибов w, поперечных сил Q, изгибающих моментов M и погонной реакции основания R. С целью оценки достоверности полученных результатов проведена проверка равновесия балки, которая сходится с высокой степенью точности:

$$\sum Y = 8{,}131 \cdot 10^{-5}\ \text{кН}; \quad \sum M_0 = 2{,}735 \cdot 10^{-4}\ \text{кН} \cdot \text{м}.$$

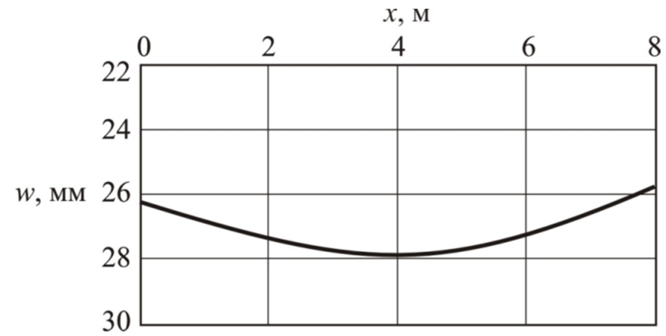

Рис. 3. Эпюра *w*

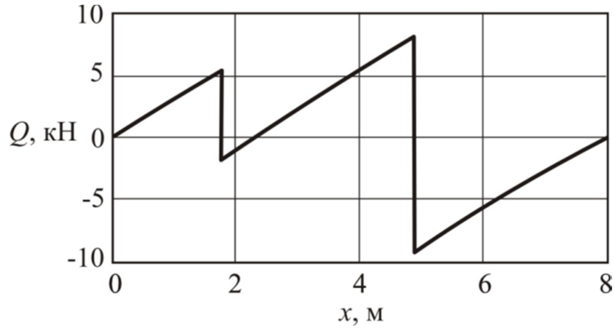

Рис. 4. Эпюра *Q*

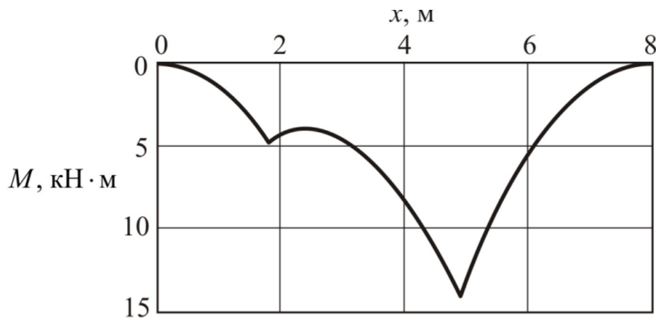

Рис. 5. Эпюра *M*

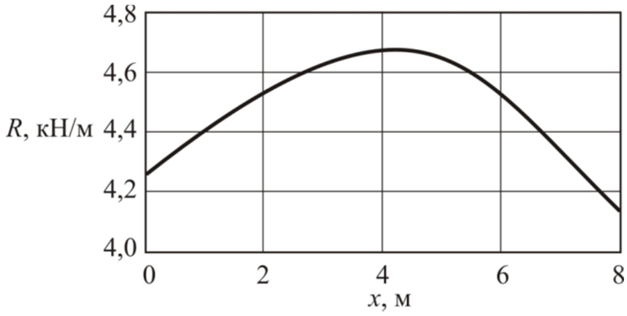

Рис. 6. Эпюра *R*

Разработанная методика конечно-элементного анализа статической реакции балки на нелинейно упругом основании может использоваться при изучении дисциплины «Нелинейные методы строительной механики» при подготовке магистров по направлению «Строительство» в рамках образовательной программы «Расчет и конструирование зданий и сооружений промышленного и гражданского назначения».

Список литературы

1. *Горбунов-Посадов М. И., Маликова Т. Л.* Расчет конструкций на упругом основании. М. : Стройиздат, 1973. 628 с.

2. *Симвулиди И. Д.* Расчет инженерных конструкций на упругом основании. М. : Высшая школа, 1973. 431 с.

3. *Шуп Т.* Решение инженерных задач на ЭВМ. М. : Мир, 1982. 238 с.

Modeling static response of a beam on a nonlinear elastic base

V. M. Shishkin

Doctor of Technical Sciences, professor of the Department of theoretical and structural mechanics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: tism1@rambler.ru

Abstract. A finite element method for modeling the static reaction of arbitrarily loaded beams lying on a non-linearly elastic Winkler base has been developed using a beam finite element operating within the framework of the classical Kirghoff-Lyav hypotheses. To obtain the equilibrium equations of a finite element, the principle of possible displacements is used. An instantaneous stiffness matrix of a finite element of a beam on a non-linearly elastic base is constructed, depending on the current deflection of the center of the element. A system of quasi-linear resolving equations is obtained for determining the static reaction of a beam on a nonlinear elastic base. A fast converging iterative algorithm for solving the resulting system of equations is proposed. A universal program for determining the stress-strain state of beams on a nonlinear elastic base has been developed using the built-in programming language of the MATLAB computer mathematics package. Numerical experiments were carried out to confirm the validity of the developed finite element method.

Keywords: beam; elastic base; finite element; iterative algorithm.

References

1. Gorbunov-Posadov M. I., Malikova T. L. *Raschet konstrukcij na uprugom osnovanii [Calculation of structures on an elastic* base]. M. Stroizdat. 1973. 628 p.

2. *Simvulidi I. D.* Raschet inzhenernyh konstrukcij na uprugom osnovanii [Calculation of engineering structures on elastic foundation]. M. Vyssh. shkola. 1973. 431 p.

3. *Shoup T*. Reshenie inzhenernyh zadach na EVM [Solution of engineering problems on a computer]. M. Mir. 1982. 238 p.