МАТЕМАТИКА

УДК 517.518.2 DOI 10.25730/VSU.0536.19.038

О полукольце всех соответствий на множестве*

Е. М. Вечтомов
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: vecht@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются свойства полукольца $\boldsymbol{R}(A)$ всех соответствий (бинарных отношений) на множестве A с операциями объединения и композиции соответствий. Полукольцо $\boldsymbol{R}(A)$ относительно включения соответствий является решеточно упорядоченным полукольцом. В терминах полукольца $\boldsymbol{R}(A)$ описаны различные виды соответствий на множестве A. Показано, что любой изоморфизм между полукольцами $\boldsymbol{R}(A)$ и $\boldsymbol{R}(B)$ индуцирован биекцией между множествами A и B. Отмечена возможность применения этих результатов к доказательству определяемости произвольного топологического пространства полукольцом всех непрерывных соответствий на нем.

Ключевые слова: множество, соответствие, полукольцо соответствий, мультипликативная полугруппа соответствий, индуцированный изоморфизм.

Соответствия и операции над ними

Статья является продолжением работ автора [1; 2].

Напомним основные понятия [3, глава 1]).

Соответствием (*бинарным отношением*) между множествами A и B называется произвольное подмножество ρ прямого произведения множеств A и B, т. е. $\rho \subseteq A \times B$. Более точно, соответствие есть тройка $\langle A, \rho, B\rangle$, где $\rho \subseteq A \times B$ называется еще *графиком* соответствия. Запись $a\rho b$ означает, что элементы $a \in A$ и $b \in B$ находятся в отношении ρ.

Пусть даны произвольные соответствия ρ, σ, θ между множествами A и B, соответствия τ, υ между множествами B и C, соответствие ω между множествами C и D.

Соответствие ρ^{-1} между множествами B и A, $b\rho^{-1}a$ равносильно $a\rho b$ для любых элементов $a \in A$ и $b \in B$, называется *обратным* к соответствию ρ.

Соответствие $\rho\tau = \rho\cdot\tau = \tau\circ\rho$ между множествами A и C, $a(\rho\tau)c$ при $a \in A$ и $c \in C$ означает, что $a\rho b$ и $b\tau c$ для некоторого элемента $b \in B$, называется *композицией*, или *произведением*, соответствий ρ и τ.

Если $A = B$, то соответствие ρ называется *соответствием на множестве A*. Соответствие равенства на множестве A обозначается 1_A. Пустое соответствие будем обозначать, как и пустое множество, через $\varnothing$.

Включение $\rho \subseteq \sigma$, *объединение* $\rho \cup \sigma$ и *пересечение* $\rho \cap \sigma$ суть теоретико-множественные включение, объединение и пересечение ρ и σ как подмножеств множества $A \times B$.

Легко видеть, что имеют место следующие **свойства соответствий**:

1) $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$, $\rho \subseteq \rho\rho^{-1}\rho$;
2) $(\rho\tau)^{-1} = \tau^{-1}\rho^{-1}$;
3) $(\rho\tau)\omega = \rho(\tau\omega)$;
4) $1_A\cdot\rho = \rho$, $\rho\cdot 1_B = \rho$, $\varnothing\cdot\rho = \rho\cdot\varnothing = \varnothing$;
5) $\rho \cup \sigma = \sigma \Leftrightarrow \rho \subseteq \sigma \Leftrightarrow \rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$;
6) $(\rho \subseteq \sigma \;\&\; \tau \subseteq \upsilon) \Rightarrow \rho\tau \subseteq \sigma\upsilon$;
7) $(\rho \cup \sigma) \cup \theta = \rho \cup (\sigma \cup \theta)$, $\rho \cup \sigma = \sigma \cup \rho$;
8) $\rho \cup \rho = \rho$, $\rho \cup \varnothing = \rho$;
9) $(\rho \cup \sigma)\,\tau = \rho\tau \cup \sigma\tau$, $\rho\,(\tau \cup \upsilon) = \rho\tau \cup \rho\upsilon$;
10) $(\rho \cup \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cup \sigma^{-1}$, $(\rho \cap \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cap \sigma^{-1}$;
11) $\rho \subseteq \sigma \Rightarrow \rho \cup \theta \subseteq \sigma \cup \theta$, $\rho \subseteq \sigma \Rightarrow \rho \cap \theta \subseteq \sigma \cap \theta$;
12) $(\rho \cap \sigma)\,\tau \subseteq \rho\tau \cap \sigma\tau$, $\rho\,(\tau \cap \upsilon) \subseteq \rho\tau \cap \rho\upsilon$.

---

* Статья написана в рамках государственного задания Минобрнауки РФ «Полукольца и их связи», проект № 1.5879.2017/8.9.

Образом подмножества X множества A при соответствии ρ называется множество $\rho(X) = \{b \in B: \exists a \in X\ a\rho b\} \subseteq B$. *Областью определения* соответствия ρ называется множество $D(\rho) = \rho^{-1}(B)$. *Множеством значений* (*образом*) соответствия ρ будет множество $R(\rho) = \rho(A) = D(\rho^{-1})$. Отметим, что

$$\rho = \cup_{a \in A} (\{a\} \times \rho(\{a\}) \text{ для любого соответствия } \rho \text{ на множестве } A. \quad (1)$$

Соответствие ρ между множествами A и B называется:

всюду определенным, если $D(\rho) = A$ ($1_A \subseteq \rho\rho^{-1}$);

однозначным, если $\forall a \in A \forall b_1, b_2 \in B(a\rho b_1 \ \&\ a\rho b_2 \Rightarrow b_1 = b_2)$ ($\rho^{-1}\rho \subseteq 1_B$);

инъективным, если $\forall a_1, a_2 \in A \forall b \in B(a_1\rho b \& a_2\rho b \Rightarrow a_1 = a_2)$ ($\rho\rho^{-1} \subseteq 1_A$);

сюръективным, когда $R(\rho) = B$, т. е. $1_B \subseteq \rho^{-1}\rho$;

биективным (или *взаимно однозначным*), когда оно всюду определено, однозначно, инъективно и сюръективно ($\rho\rho^{-1} = 1_A$ и $\rho^{-1}\rho = 1_B$).

Всюду определенное однозначное соответствие между множествами A и B называется *функциональным*, *функцией* или *отображением* ($A \to B$). Всюду определенное соответствие называют также *многозначной функцией*, а однозначное соответствие – *частичной функцией*.

Соответствие ρ назовем *полным*, если $\rho = D(\rho) \times R(\rho)$. Полными соответствиями на множестве A служат *константные отображения* π_a: $A \to \{a\}$, $a \in A$. Константные отображения являются минимальными элементами упорядоченного множества с отношением включения $\subseteq$ всех полных всюду определенных соответствий ρ ($= A \times R(\rho)$).

Соответствие ρ на множестве назовем *симметричным*, если $\rho^{-1} \subseteq \rho$, равносильно, $\rho^{-1} = \rho$.

Полукольца соответствий на множестве

Алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot\rangle$ называется *полукольцом*, если $\langle S, +\rangle$ – аддитивно записанная коммутативная полугруппа, $\langle S, \cdot\rangle$ – мультипликативно записанная полугруппа, операция умножения $\cdot$ дистрибутивна относительно операции сложения + с обеих сторон: $a(b + c) = ab + ac$, $(a + b)c = ac + bc$ для всех $a, b, c \in S$.

Элемент 0 полукольца S называется *нулем*, если $s + 0 = s$ и $s \cdot 0 = 0 \cdot s = 0$ для любого $s \in S$ (нуль единственен при условии его существования). Элемент 1 полукольца S называется *единицей*, если $s \cdot 1 = 1 \cdot s = s$ для всех $s \in S$ (единица единственна при условии ее существования). Полукольцо, имеющее нуль (единицу), называется *полукольцом с нулем* (*полукольцом с единицей*). Элемент s полукольца S с единицей 1 называется *обратимым*, если $st = ts = 1$ для некоторого элемента $t \in S$. Полукольцо с тождеством $x + x = x$ называется (аддитивно) *идемпотентным*. Полукольцо с коммутативным умножением само называется *коммутативным*. Элемент a полукольца S называется *правым* (*левым*) *поглощающим* элементом, если $sa = a$ ($as = a$) для всех $s \in S$.

Информацию о полукольцах можно найти в главе 1 книги [6].

Рассмотрим теперь множество $\boldsymbol{R}(A)$ всевозможных соответствий на непустом множестве A. Относительно операций объединения $\cup$ (сложение) и композиции $\cdot$ (умножение) множество $\boldsymbol{R}(A)$ оказывается полукольцом в силу свойств 7), 3) и 9). На основании свойств 4) и 8) $\langle \boldsymbol{R}(A), \cup, \cdot\rangle$ – идемпотентное полукольцо с нулем $\varnothing$ и единицей 1_A. Поскольку на полукольце $\boldsymbol{R}(A)$ имеется естественный порядок $\subseteq$ со свойствами 11) и 6), то $\langle \boldsymbol{R}(A), \cup, \cdot, \subseteq\rangle$ является упорядоченным полукольцом с наименьшим элементом $\varnothing$ и наибольшим элементом – полным соответствием $A \times A$. Упорядоченное множество $\boldsymbol{R}(A)$ совпадает с булеаном $\boldsymbol{B}(A \times A)$ – множеством всех подмножеств множества $A \times A$. Поэтому упорядоченное полукольцо $\boldsymbol{R}(A)$ будет *решеточно упорядоченным полукольцом*. Поскольку в свойстве 12) включение, вообще говоря, строгое, когда A содержит не менее двух элементов, то в этом случае алгебраическая структура $\langle \boldsymbol{R}(A), \cap, \cdot\rangle$ не будет полукольцом.

Предложение 1. *Для любого непустого множества A алгебраическая система $\langle \boldsymbol{R}(A), \cup, \cdot, \subseteq\rangle$ является решеточно упорядоченным полукольцом.*

Предложение 2. *Отображение $\rho \to \rho^{-1}$, $\rho \in \boldsymbol{R}(A)$, является антиавтоморфизмом полукольца $\boldsymbol{R}(A)$.*

Доказательство. По свойствам 1), 2) и 10) операция взятия обратного соответствия на полукольце $\boldsymbol{R}(A)$ будет инволюцией, сохраняющей операцию объединения, отношение включения и переставляющей сомножители в композиции соответствий.

Замечание 1. Указанные свойства 1), 2), 10) показывают, что для соответствий выполняется **принцип двойственности**:

если имеется некоторое предложение о соответствиях и операциях объединения и композиции над ними, то, заменяя соответствия на обратные к ним, сохраняя объединения и переставляя сомножители в композициях, получим двойственное предложение, эквивалентное исходному предложению.

Так, в свойстве 9) законы дистрибутивности двойственны друг другу. Поэтому достаточно доказать один из законов дистрибутивности, а другой получится из доказанного по принципу двойственности.

Пусть $Ann_l\,\rho = \{\chi \in \boldsymbol{R}(A)\colon \chi\rho = \varnothing\}$, $Ann_r\,\rho = \{\chi \in \boldsymbol{R}(A)\colon \rho\chi = \varnothing\}$ – соответственно левый и правый аннуляторы соответствия $\rho \in \boldsymbol{R}(A)$. По свойствам 3) и 9) получаем левый идеал $Ann_l\,\rho$ и правый идеал $Ann_r\,\rho$ в полукольце $\boldsymbol{R}(A)$.

Лемма 1. *Для любых соответствий $\rho, \sigma \in \boldsymbol{R}(A)$ верны следующие утверждения*:

1. $\rho\sigma = \varnothing \Leftrightarrow R(\rho) \cap D(\sigma) = \varnothing$.
2. $D(\rho) \subseteq D(\sigma) \Leftrightarrow Ann_l\,\sigma \subseteq Ann_l\,\rho$.
3. $D(\rho) = D(\sigma) \Leftrightarrow Ann_l\,\sigma = Ann_l\,\rho$.
4. $R(\rho) \subseteq R(\sigma) \Leftrightarrow Ann_r\,\sigma \subseteq Ann_r\,\rho$.
5. $R(\rho) = R(\sigma) \Leftrightarrow Ann_r\,\sigma = Ann_r\,\rho$.

Доказательство. Утверждение 1 вытекает из определений. Утверждения 2 и 4 следуют из 1. Импликации $2 \Rightarrow 3$ и $4 \Rightarrow 5$ очевидны.

Введем в рассмотрение некоторые важные и интересные подполукольца полукольца $\boldsymbol{R}(A)$.

Положим: $\boldsymbol{DR}(A)$ – множество всех всюду определенных соответствий на A; $\boldsymbol{IR}(A)$ – множество всех сюръективных соответствий на A; $\boldsymbol{SR}(A)$ – множество всех симметричных соответствий на A. Ясно, что множества $\boldsymbol{DR}(A)$ и $\boldsymbol{IR}(A)$ будут подполукольцами с единицей и без нуля в полукольце $\boldsymbol{R}(A)$, а $\boldsymbol{SR}(A)$ – коммутативным, в силу свойства 2), подполукольцом с нулем и единицей в полукольце $\boldsymbol{R}(A)$.

Лемма 2. *Для соответствия $\rho \in \boldsymbol{R}(A)$ верны следующие утверждения*:

1. $\rho \in \boldsymbol{DR}(A) \Leftrightarrow Ann_l\,\rho = \{\varnothing\}$.
2. $\rho \in \boldsymbol{IR}(A) \Leftrightarrow Ann_r\,\rho = \{\varnothing\}$.
3. *ρ является правым поглощающим элементом полукольца $\boldsymbol{DR}(A)$ $\Leftrightarrow$ ρ есть полное, всюду определенное соответствие.*
4. *ρ является левым поглощающим элементом полукольца $\boldsymbol{IR}(A)$ $\Leftrightarrow$ ρ есть полное сюръективное соответствие.*

Доказательство. Утверждения 1 и 2 вытекают из утверждения 1 леммы 1, а утверждения 3 и 4 взаимно двойственны.

Докажем утверждение 3. Достаточность $\Leftarrow$ очевидна. Предположим, что всюду определенное соответствие ρ на множестве A не является полным. Тогда существуют такие $a, b \in A$ и $c \in Im\,\rho$, что $b\rho c$ и $\rceil(a\rho c)$, т. е. $b\rho c$ истинно и $a\rho c$ ложно. Для константного отображения π_b получаем $a(\pi_b\rho)c$. Откуда $\pi_b\rho \neq \rho$. Значит, соответствие ρ не будет правым поглощающим элементом полукольца $\boldsymbol{DR}(A)$.

Лемма 3. *Для произвольного соответствия $\rho \in \boldsymbol{R}(A)$ следующие утверждения эквивалентны*:

1. *ρ есть константное отображение, т. е. $\rho = \pi_a$ для некоторого элемента $a \in A$.*
2. *ρ – минимальный элемент упорядоченного множества всех полных, всюду определенных соответствий на множестве A.*
3. *ρ всюду определено и существует единственное ненулевое соответствие $\sigma \in \boldsymbol{R}(A)$, для которого $D(\sigma) \subseteq R(\rho)$ и $R(\sigma) \subseteq R(\rho)$.*

Доказательство. Ясно, что $1 \Leftrightarrow 2$. Эквивалентность утверждений 1 и 3 вытекает из [7, lemma (2.10)].

Легко видеть, что имеют место три следующие леммы:

Лемма 4. *Соответствие $\rho \in \boldsymbol{R}(A)$ является обратимым элементом полукольца $\boldsymbol{R}(A)$ $\Leftrightarrow$ ρ есть биекция множества A на само себя.*

Лемма 5. *Для любых соответствий $\rho, \sigma \in \boldsymbol{R}(A)$ равносильны следующие утверждения*:

1. $\rho \subseteq \sigma$.
2. *$R(\pi\rho) \subseteq R(\pi\sigma)$ для всякого константного отображения π из $\boldsymbol{R}(A)$.*

Лемма 6. *Соответствие $\rho \in \boldsymbol{R}(A)$ является полным $\Leftrightarrow$ соответствие $\pi\rho$ будет полным, всюду определенным соответствием для любого константного соответствия $\pi \in \boldsymbol{R}(A)$, такого, что $\pi\rho \neq \varnothing$.*

Лемма 7. *Каждое соответствие $\rho \in \boldsymbol{R}(A)$ однозначно определяется включениями $\pi_a\rho \supseteq \pi_c$, где $a, c \in A$.*

Действительно, для любых $a, c \in A$ имеем:

$$a\rho c \Leftrightarrow c \in R(\pi_a\rho) \Leftrightarrow \pi_a\rho \supseteq \pi_c. \tag{2}$$

Замечание 2. Леммы 1–7 показывают, что свойства соответствий на произвольном непустом множестве A выражается на языке операции композиции, т. е. в терминах мультипликативной полугруппы полукольца $\boldsymbol{R}(A)$. Но если вместо полукольца $\boldsymbol{R}(A)$ взять его подполукольцо $\boldsymbol{DR}(A)$, то в лемме 3 для алгебраического описания константных отображений годится только утверждение 2, использующее порядок $\subseteq$ (определяемый операцией объединения $\cup$), т. е. константные отображения на множестве A характеризуются в терминах полукольца $\boldsymbol{DR}(A)$; то же самое относится и к полукольцевой определяемости соответствий согласно формуле (2).

Изоморфизмы полуколец соответствий

Опишем все изоморфизмы полуколец $\boldsymbol{R}(A)$ и $\boldsymbol{R}(B)$ соответствий на любых (непустых) множествах A и B.

Возьмем произвольную биекцию f: $A \to B$. Она индуцирует изоморфизм α_f полукольца $\boldsymbol{R}(A)$ на полукольцо $\boldsymbol{R}(B)$ по следующему правилу:

$$f(x)\alpha_f(\rho)f(y) \Leftrightarrow x\rho y \text{ для любых } \rho \in \boldsymbol{R}(A),\ x, y \in A. \qquad (3)$$

Кроме того, имеем биекцию $f \times f$: $A \times A \to B \times B$, $(f \times f)(x, y) = (f(x), f(y))$, которая порождает изоморфизм $\boldsymbol{f \times f}$: $\boldsymbol{B}(A \times A) \to \boldsymbol{B}(B \times B)$ булеана $\boldsymbol{B}(A \times A)$ на булеан $\boldsymbol{B}(B \times B)$ [1, следствие 3]. В результате $\alpha_f = \boldsymbol{f \times f}$ – *индуцированная* – биекцией f – биекция между полукольцами $\boldsymbol{R}(A)$ и $\boldsymbol{R}(B)$.

Предложение 3. *Для любой биекции f: $A \to B$ индуцированная биекция α_f является изоморфизмом полукольца $\boldsymbol{R}(A)$ на полукольцо $\boldsymbol{R}(B)$.*

Доказательство. Остается проверить, что α_f сохраняет операцию композиции соответствий, т. е. $\alpha_f(\rho\sigma) = \alpha_f(\rho)\alpha_f(\sigma)$ при любых $\rho, \sigma \in \boldsymbol{R}(A)$. В силу (3) и приведенных выше определений получаем:

$$\alpha_f(\rho\sigma) = (\boldsymbol{f \times f})(\rho\sigma) = \{(f(x), f(y)) : x(\rho\sigma)y\} = \{(f(x), f(y)) : \exists z \in A\ (x\rho z\ \&\ z\sigma y\} =$$
$$= \{(f(x), f(y)) : \exists f(z) \in B\ (f(x)\alpha_f(\rho)f(z)\ \&\ f(z)\alpha_f(\sigma)f(y))\} =$$
$$= \{(f(x), f(y)) : f(x)(\alpha_f(\rho)\alpha_f(\sigma))f(y)\} = \alpha_f(\rho)\alpha_f(\sigma).$$

Полукольцевые изоморфизмы α_f: $\boldsymbol{R}(A) \cong \boldsymbol{R}(B)$ по биекциям f: $A \to B$ будем называть *индуцированными*.

Предложение 4. *Изоморфизмы полукольца $\boldsymbol{R}(A)$ на полукольцо $\boldsymbol{R}(B)$ совпадают с индуцированными изоморфизмами.*

Доказательство. В силу предложения 3 индуцированные изоморфизмы α_f являются полукольцевыми изоморфизмами.

Обратно, пусть α: $\boldsymbol{R}(A) \to \boldsymbol{R}(B)$ – произвольный полукольцевой изоморфизм. Определим биекцию f: $A \to B$, для которой $\alpha = \alpha_f$. В силу леммы 2 изоморфизм α устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством $\{\pi_a : a \in A\}$ константных отображений полукольца $\boldsymbol{R}(A)$ и множеством $\{\pi_b : b \in B\}$ константных отображений полукольца $\boldsymbol{R}(B)$. Получаем биекцию f: $A \to B$, такую, что

$$f(a) = b \Leftrightarrow \alpha(\pi_a) = \pi_b \text{ для любых } a \in A \text{ и } b \in B. \qquad (4)$$

Покажем, что $\alpha(\rho) = \alpha_f(\rho)$ для каждого $\rho \in \boldsymbol{R}(A)$. Пусть $b, d \in B$, $f(a) = b$ и $f(c) = d$ для подходящих $a, c \in A$. Тогда $\alpha(\pi_a) = \pi_b$ и $\alpha(\pi_c) = \pi_d$. На основании (4), (3) и (2) имеем:

$$b\alpha_f(\rho)d \Leftrightarrow f(a)\alpha_f(\rho)f(c) \Leftrightarrow a\rho c \Leftrightarrow \pi_a\rho \supseteq \pi_c \Leftrightarrow \alpha(\pi_a\rho) \supseteq \alpha(\pi_c) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha(\pi_a)\alpha(\rho) \supseteq \alpha(\pi_c) \Leftrightarrow \pi_b\alpha(\rho) \supseteq \pi_d \Leftrightarrow b\alpha(\rho)d.$$

Предложение доказано.

Дополнение

Если A – топологическое пространство, то можно рассмотреть полукольцо $\boldsymbol{CR}(A)$ всех непрерывных соответствий на A с теми же операциями объединения и композиции соответствий. Соответствие ρ на топологическом пространстве A назовем *непрерывным* (в [2] такие соответствия названы строго непрерывными), если образ $\rho^{-1}(U)$ любого открытого множества U пространства A (при соответствии ρ^{-1}) есть открытое множество в A. Легко видеть, что объединение и композиция всяких двух непрерывных соответствий на топологическом пространстве суть непрерывные соответствия на этом пространстве. Полукольцо $\boldsymbol{CR}(A)$ решеточно упорядоченное и является подполукольцом полукольца $\boldsymbol{R}(A)$. Отметим, что полные всюду определенные соответствия на A являются непрерывными, в частности непрерывными будут константные отображения π_a, $a \in A$.

Используя приведенные выше рассуждения, можно доказать следующую **теорему определяемости**:

Каждое топологическое пространство A однозначно, с точностью до гомеоморфизма, определяется полукольцом $\boldsymbol{CR}(A)$ всех непрерывных соответствий на A.

Отметим, что проблеме определяемости топологических пространств различными алгебраическими системами непрерывных функций на них посвящены обзорные статьи [4; 5, глава 1].

Замечание 3. Замкнутые соответствия на топологическом пространстве A, т. е. соответствия, являющиеся замкнутыми подмножествами тихоновского произведения $A \times A$, изучал K. Maggil [7]. Он назвал T_1-пространство A *σ-пространством* в случае, когда композиция любых двух замкнутых соответствий на A также будет замкнутым соответствием, и обозначил через $\sigma[A]$ полугруппу всех замкнутых соответствий на σ-пространстве A с операцией композиции соответствий. Отметим, что объединение двух замкнутых соответствий на топологическом пространстве всегда будет замкнутым соответствием. Поэтому $\sigma[A]$ является подполукольцом полукольца $\boldsymbol{R}(A)$ для всякого σ-пространства A.

Maggil описал все изоморфизмы полугрупп $\sigma[A]$ и $\sigma[B]$, доказав следующую **теорему** [7, theorem (3.3)]:

Для любой биекции α между полугруппами $\sigma[A]$ и $\sigma[B]$ замкнутых соответствий на произвольных σ-пространствах A и B эквивалентны следующие утверждения:

α – изоморфизм;

существует гомеоморфизм f пространства A на пространство B, такой, что $\alpha(\rho) = f^{-1}\rho f$ для всех соответствий $\rho \in \sigma[A]$;

$\alpha = \alpha_f$ для некоторого гомеоморфизма f пространства A на пространство B.

Для дискретного пространства A имеем $\sigma[A] = \boldsymbol{R}(A)$. Поэтому из данной теоремы и предложения 3 вытекает предложение 4, а также

Следствие. *Мультипликативные изоморфизмы полуколец **R**(A) и **R**(B) являются полукольцевыми изоморфизмами*.

Список литературы

1. *Вечтомов Е. М.* Бинарные отношения и гомоморфизмы булеанов // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1 : Математика, механика, информатика. 2019. Вып. 1 (30). С. 3–15.

2. *Вечтомов Е. М.* О непрерывных соответствиях между топологическими пространствами // Advanced science. 2019. № 3. С. 4–9.

3. *Вечтомов Е. М.* Математика: основные математические структуры : учебное пособие для академического бакалавриата. 2-е изд.. М. : Юрайт, 2018. 296 с.

4. *Вечтомов Е. М.* О Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций // Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР. Алгебра. Топология. Геометрия. 1990. Т. 28. С. 3–46.

5. *Вечтомов Е. М.* Кольца непрерывных функций. Алгебраические аспекты // Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР. Алгебра. Топология. Геометрия. 1991. Т. 29. С. 119–191.

6. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Чермных В. В.* Элементы теории полуколец : монография. Киров : Радуга-ПРЕСС, 2012. 228 с.

7. *Maggil K. D.* Isomorphisms of triform semigroups // J. Austral Math. Soc. 1969. Vol. 10. Pp. 185–193.

On the half-ring of all correspondences on the set

E. M. Vechtomov

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, head of the Department of fundamental mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: vecht@mail.ru

Abstract. We consider the properties of the semicircle R (A) of all correspondences (binary relations) on the set A with the operations of combining and composing correspondences. The half-ring R (A) with respect to the inclusion of correspondences is a lattice-ordered half-ring. In terms of the half-ring R (A), various kinds of correspondences are described on the set A. It is shown that any isomorphism between the half-rings R (A) and R (B) is induced by a bijection between the sets A and B. The possibility of applying these results to the proof of determinability of an arbitrary topological space by a semicircle of all continuous correspondences on it is noted.

Keywords: set, correspondence, semi-ring of correspondences, multiplicative semigroup of correspondences, induced isomorphism.

References

1. *Vechtomov E. M. Binarnye otnosheniya i gomomorfizmy buleanov* [Binary relations and homomorphisms of Booleans] // *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Seriya 1 : Matematika, mekhanika, informatika* – Herald of Syktyvkar University. Series 1 : Mathematics, mechanics, computer science. 2019. Is. 1 (30). Pp. 3–15.

2. *Vechtomov E. M. O nepreryvnyh sootvetstviyah mezhdu topologicheskimi prostranstvami* [On continuous correspondences between topological spaces] // Advanced science. 2019. No. 3. Pp. 4–9.

3. *Vechtomov E. M. Matematika: osnovnye matematicheskie struktury : uchebnoe posobie dlya akademicheskogo bakalavriata* [Mathematics: basic mathematical structures : a textbook for academic baccalaureate. 2nd ed.] M. Yurayt. 2018. 296 p.

4. *Vechtomov E. M. O Voprosy opredelyaemosti topologicheskih prostranstv algebraicheskimi sistemami nepreryvnyh funkcij* [Questions of definability of topological spaces by algebraic systems of continuous functions] // *Itogi nauki i tekhniki. VINITI AN SSSR. Algebra. Topologiya. Geometriya* – Results of science and technology. All-Union Institute of scientific and technical information, USSR AS. Algebra. Topology. Geometry. 1990. Vol. 28. Pp. 3–46.

5. *Vechtomov E. M. Kol'ca nepreryvnyh funkcij. Algebraicheskie aspekty* [Rings of continuous functions. Algebraic aspects] // *Itogi nauki i tekhniki. VINITI AN SSSR. Algebra. Topologiya. Geometriya* – Results of science and technology. All-Union Institute of scientific and technical information, USSR AS. Algebra. Topology. Geometry. 1991. Vol. 29. Pp. 119–191.

6. *Vechtomov E. M., Lubyagina E. N., Chermnyh V. V. Elementy teorii polukolec : monografiya* [Elements of the theory of semirings : monograph]. Kirov. Raduga-PRESS. 2012. 228 p.

7. *Maggil K. D.* Isomorphisms of triform semigroups // J. Austral Math. Soc. 1969. Vol. 10. Pp. 185–193.