МАТЕМАТИКА

УДК 519.854 DOI 10.25730/VSU.0536.20.032

Представления решений линейных неоднородных дискретных двухпараметрических систем

С. Т. Алиева
кандидат физико-математических наук, доцент, Бакинский государственный университет.
Азербайджан, г. Баку. E-mail: saadata@mail.ru

Аннотация. Рассматривается одна линейная неоднородная двухпараметрическая дискретная система уравнений типа Россера, причем граничное условие является решением аналога задачи Коши для линейного обыкновенного разностного уравнения. Коэффициентами уравнения являются заданные дискретные матриц-функции. Рассматриваемая задача представляет собой дискретный аналог задачи, описываемой линейными двухпараметрическими дифференциальными уравнениями частными производными типа Россера. Введя аналог матрицы Римана, получили представления решений рассматриваемой краевой задачи. Как известно, линейные двухпараметрические разностные уравнения возникают, например, при численном интегрировании частных производных дифференциальных уравнений. Кроме этого, полученный результат играет существенную роль в линейном случае для установления необходимого и достаточного условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина, а также в общем случае для исследования особого управления в дискретных задачах оптимального управления системами Россера. Поэтому установленный результат можно считать также вкладом теории задач оптимального управления системами Россера.

Ключевые слова: система типа Россера, представления решений, линейное разностное уравнение.

Как известно, при выводе необходимых условий оптимальности существенную роль играют формулы представления решений соответствующих линеаризованных систем [1–5].

Исходя из этого, работа посвящена вопросам, связанным с представлением решений, линейных неоднородных систем уравнений типа Россера.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} z(t+1,x+1) = A(t,x)z(t,x) + B(t,x)z(t+1,x) + \\ + C(t,x)z(t,x+1) + f(t,x), \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &z(t_0,x) = a(x), \quad x = x_0, x_0+1, \ldots, x_1, \\ &z(t,x_0) = b(t), \quad t = t_0, t_0+1, \ldots, t_1, \\ &a(x_0) = b(t_0). \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$ – заданные $(n \times n)$-мерные дискретные функции, $f(t,x)$ – заданная n-мерная дискретная функция, $b(t)$ – заданная дискретная векторная функция, а $a(x)$ – n-мерная вектор-функция, являющаяся решением линейного разностного уравнения

$$\begin{aligned} &a(x+1) = D(x)a(x) + g(x), \quad x \in X, \\ &a(x_0) = a_0, \end{aligned} \tag{3}$$

где $D(x)$ – заданная $(n \times n)$-матричная функция, $g(x)$ – заданная n-мерная вектор-функция.

Требуется найти представления решения системы уравнений (1)–(3).

2. Основной результат. Через $R(t,x;\tau,s)$ и $\Phi(x;s)$ обозначим пока неизвестные $(n \times n)$ матричные функции.

Пусть $z(t,x)$ – решение системы (1)–(2). Тогда ясно, что

$$y(\tau+1,s+1)=A(\tau,s)y(\tau,s)+B(\tau,s)y(\tau+1,s)+C(\tau,s)y(\tau,s+1)+f(\tau,s).$$

Умножим обо части этого соотношение слева на $R(t,x;\tau,s)$ и просуммируем по τ от t_0 до $t-1$ и по s от x_0 до $x-1$. В результате получим

$$\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R(t,x;\tau,s)z(\tau+1,s+1)=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R(t,x;\tau,s)A(\tau,s)z(\tau,s)+$$
$$+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R(t,x;\tau,s)B(\tau,s)z(\tau+1,s)+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R(t,x;\tau,s)C(\tau,s)z(\tau,s+1)+ \quad (4)$$
$$+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R(t,x;\tau,s)f(\tau,s).$$

Используя замену переменных $\tau+1=\alpha$, $s+1=\beta$, докажем справедливость следующих тождеств.

$$\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R(t,x;\tau,s)z(\tau+1,s+1)=\sum_{\tau=t_0+1}^{t}\sum_{s=x_0+1}^{x}R(t,x;\tau-1,s-1)z(\tau,s)=$$
$$=R(t,x;t-1,x-1)z(t,x)-R(t,x;t-1,x_0-1)z(t,x_0)-$$
$$-R(t,x;t_0-1,x-1)z(t_0,x)+R(t,x;t_0-1,x_0-1)z(t_0,x_0)+$$
$$+\sum_{s=x_0}^{x-1}R(t,x;t-1,s-1)z(t,s)-\sum_{s=x_0}^{x-1}R(t,x;t_0-1,s-1)z(t_0,s)+$$
$$+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}R(t,x;\tau-1,x-1)z(\tau,x)-\sum_{\tau=t_0}^{t-1}R(t,x;\tau-1,x_0-1)z(\tau,x_0)+$$
$$+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R(t,x;\tau-1,s-1)z(\tau,s), \quad (5)$$

$$\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R(t,x;\tau,s)B(\tau,s)z(\tau+1,s)=\sum_{\tau=t_0+1}^{t}\sum_{s=x_0}^{x-1}R(t,x;\tau-1,s)B(\tau-1,s)z(\tau,s)=$$
$$=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R(t,x;\tau-1,s)B(\tau-1,s)z(\tau,s)+\sum_{s=x_0}^{x-1}R(t,x;t-1,s)B(t-1,s)z(t,s)-$$
$$-\sum_{s=x_0}^{x-1}R(t,x;t_0-1,s)B(t_0-1,s)z(t_0,s), \quad (6)$$

$$\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R(t,x;\tau,s)C(\tau,s)z(\tau,s+1)=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0+1}^{x}R(t,x;\tau,s-1)C(\tau,s-1)z(\tau,s)=$$
$$=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}R(t,x;\tau,x-1)C(\tau,x-1)z(\tau,x)-\sum_{\tau=t_0}^{t-1}R(t,x;\tau,x_0-1)C(\tau,x_0-1)z(\tau,x_0)+$$
$$+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R(t,x;\tau,s-1)C(\tau,s-1)z(\tau,s). \quad (7)$$

Принимая во внимание тождества (5)-(7) в равенство (4), будем иметь

$$\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R(t,x;\tau-1,s-1)z(\tau,s)+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}R(t,x;\tau-1,x-1)z(\tau,x)-$$
$$-\sum_{\tau=t_0}^{t-1}R(t,x;\tau-1,x_0-1)z(\tau,x_0)+\sum_{s=x_0}^{x-1}R(t,x;t-1,s-1)z(t,s)-$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{s=x_0}^{x-1} R(t,x;t_0-1,s-1)z(t_0,s)+R(t,x;t-1,x-1)z(t,x)-\\
&-R(t,x;t-1,x_0-1)z(t,x_0)-R(t,x;t_0-1,x-1)z(t_0,x)+\\
&+R(t,x;t_0-1,x_0-1)z(t_0,x_0)=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R(t,x;\tau,s)A(\tau,s)z(\tau,s)+\\
&+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R(t,x;\tau-1,s)B(\tau-1,s)z(\tau,s)+\sum_{s=x_0}^{x-1}R(t,x;t-1,s)B(t-1,s)z(t,s)-\\
&-\sum_{s=x_0}^{x-1}R(t,x;t_0-1,s)B(t_0-1,s)z(t_0,s)+\\
&+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R(t,x;\tau,s-1)C(\tau,s-1)z(\tau,s)+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}R(t,x;\tau,x-1)C(\tau,x-1)z(\tau,x)-\\
&-\sum_{\tau=t_0}^{t-1}R(t,x;\tau,x_0-1)C(\tau,x_0-1)z(\tau,x_0)+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R(t,x;\tau,s)f(\tau,s).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Теперь предположим, что $R(t,x;\tau,s)$ является решением следующей задачи.

$$
\begin{gathered}
R(t,x;\tau-1,s-1)=R(t,x;\tau,s)A(\tau,s)+R(t,x;\tau-1,s)B(\tau-1,s)+\\
+R(t,x;\tau,s-1)C(\tau,s-1),\ \tau=t-1,\dots,t_0,\ s=x-1,\dots,x_0,\\
R(t,x;\tau-1,x-1)=R(t,x;\tau,x-1)C(\tau,x-1),\ \tau=t-1,\dots,t_0,\\
R(t,x;t-1,s-1)=R(t,x;t-1,s)B(t-1,s),\ s=x-1,\dots,x_0,\\
R(t,x;t-1,x-1)=E.
\end{gathered}
$$

Тогда по тождеству (8) следует, что

$$
\begin{aligned}
&z(t,x)=R(t,x;t-1,x_0-1)z(t,x_0)+R(t,x;t_0-1,x-1)z(t_0,x)-\\
&-R(t,x;t_0-1,x_0-1)z(t_0,x_0)+\\
&+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\left[\mathrm{R}(\mathrm{t},x;\tau-1,\mathrm{x}_0-1)-R(t,x;\tau,x_0-1)C(\tau,x_0-1)\right]z(\tau,x_0)+\\
&+\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[\mathrm{R}(\mathrm{t},x;t_0-1,s-1)-R(t,x;t_0-1,s)B(t_0-1,s)\right]z(t_0,s)+\\
&+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R(t,x;\tau,s)f(\tau,s).
\end{aligned}
$$

Матрица $R(t,x;\tau,s)$ является дискретным аналогом матрицы для задачи Гурса – Дарбу [5]. Принимая во внимание (2) представления (8), можно записать в виде:

$$
\begin{aligned}
&z(t,x)=R(t,x;t_0-1,x-1)a(x)+R(t,x;t-1,x_0-1)b(t)-\\
&\qquad -R(t,x;t_0-1,x_0-1)a(x_0)+\\
&+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\left[\mathrm{R}(\mathrm{t},\mathrm{x};\tau-1,\mathrm{x}_0-1)-R(t,x;\tau,x_0-1)C(\tau,x_0-1)\right]b(\tau)+\\
&+\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[R(t,x;t_0-1,s-1)-R(t,x;t_0-1,s)B(t_0-1,s)\right]a(s)\\
&+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R(t,x;\tau,s)f(\tau,s).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Ясно, что $a(x)$ решения линейных неоднородных уранениях в виде (3) и это решения определяется в следующей форме

$$a(x)=\Phi(x,x_0-1)a(x_0)+\sum_{s=t_{x0}}^{x-1}\Phi(x,s)g(s) \tag{10}$$

где матричная функция $\Phi(x,s)$ является решением следующей задачи:

$$\Phi(x,s-1)=\Phi(x,s)D(s)$$
$$\Phi(x,x-1)=E$$

$E-\ n\times n-$ мерная единичная матрица.

Подставляя (10) в (9), будем иметь:

$$\begin{aligned}
z(t,x)={}&R(t,x;t_0-1,x-1)\left[\Phi(x,x_0-1)a(x_0)+\sum_{s=x_0}^{x-1}\Phi(x,s)g(s)\right]+R(t,x;t-1,x_0-1)b(t)-\\
&-R(t,x;t_0-1,x_0-1)a(x_0)+\\
&+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\left[\mathrm{R}(\mathrm{t},\mathrm{x};\tau-1,\mathrm{x}_0-1)-R(t,x;\tau,x_0-1)C(\tau,x_0-1)\right]b(\tau)+\\
&+\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[R(t,x;t_0-1,s-1)-R(t,x;t_0-1,s)B(t_0-1,s)\right]\left[\Phi(s,x_0-1)a(x_0)+\sum_{\alpha=x_0}^{x-1}\Phi(x,\alpha)g(\alpha)\right]\\
&+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R(t,x;\tau,s)g(\tau,s)=\Big(R(t,x;t_0-1,x-1)\Phi(x,x_0-1)+R(t,x;t_0-1,x_0-1)+\\
&+\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[R(t,x;t_0-1,s-1)-R(t,x;t_0-1,s)B(t_0-1,s)\Phi(s,x_0-1)\right]\Big)a(x_0)+\\
&+R(t,x;t_0-1,x-1)\sum_{s=x_0}^{x-1}\Phi(x,s)g(s)+R(t,x;t-1,x_0-1)b(t)+\\
&+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\left[\mathrm{R}(\mathrm{t},\mathrm{x};\tau-1,\mathrm{x}_0-1)-R(t,x;\tau,x_0-1)C(\tau,x_0-1)\right]b(\tau)+\\
&+\sum_{s=x_0}^{x-1}\sum_{\alpha=x_0}^{x-1}\Phi(x,\alpha)g(\alpha)\left[R(t,x;t_0-1,s-1)-R(t,x;t_0-1,s)B(t_0-1,s)\right]\\
&+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R(t,x;\tau,s)f(\tau,s).
\end{aligned} \tag{11}$$

Полагая

$$\begin{aligned}
Q_1(t,x)={}&\Big(R(t,x;t_0-1,x-1)\Phi(x,x_0-1)+R(t,x;t_0-1,x_0-1)\\
&+\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[R(t,x;t_0-1,s-1)-R(t,x;t_0-1,s)B(t_0-1,s)\Phi(s,x_0-1)\right]\Big),\\
Q_2(t,x)={}&R(t,x;t_0-1,x-1)\sum_{s=x_0}^{x-1}\Phi(x,s)g(s)+R(t,x;t-1,x_0-1)b(t)+\\
&+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\left[\mathrm{R}(\mathrm{t},\mathrm{x};\tau-1,\mathrm{x}_0-1)-R(t,x;\tau,x_0-1)C(\tau,x_0-1)\right]b(\tau)+\\
&+\sum_{s=x_0}^{x-1}\sum_{\alpha=x_0}^{x-1}\Phi(x,\alpha)g(\alpha)\left[R(t,x;t_0-1,s-1)-R(t,x;t_0-1,s)B(t_0-1,s)\right].
\end{aligned}$$

соотношения (11) записываются в виде:

$$z(t,x)=Q_1(t,x)a(x_0)+Q_2(t,x)+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R(t,x;\tau,s)g(\tau,s). \tag{12}$$

Теорема. Решение $z(t,x)$ краевой задачи (1)–(3) допускает представление в виде (12).

Список литературы

1. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Оптимизация линейных систем. Мн. : Изд-во БГУ, 1973. 248 с.

2. *Гайшун И. В.* Многопараметрические системы управления. Мн. : Наука и техника, 1996. 200 с.

3. *Гайшун И. В*. Системы с дискретным временем. Мн. : ИМ НАН Беларуси, 2001. 400 с.

4. *Мансимов К. Б.* Дискретные системы. Изд-во Бакинского государственного университета. Баку, 2002. 114 с.

5. *Мансимов К. Б.* Оптимизация одного класса дискретных двухпараметрических систем // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27. № 2. С. 359–362.

Representations of solutions of linear inhomogeneous discrete two-parameter systems

S. T. Alieva
PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor, Baku State University.
Azerbaijan, Baku. E-mail: saadata@mail.ru

Abstract. One linear inhomogeneous two-parameter discrete system of Rosser-type equations is considered, and the boundary condition is the solution of an analog of the Cauchy problem for a linear ordinary difference equation. The coefficients of the equation are given discrete matrix functions. The problem under consideration is a discrete analog of the problem described by linear two-parameter partial differential equations of the Rosser type. By introducing an analog of the Riemann matrix, we obtained representations of solutions to the boundary value problem under consideration. As is well known, linear two-parameter difference equations arise, for example, in the numerical integration of partial derivatives of differential equations. In addition, the obtained result plays an essential role in the linear case for establishing a necessary and sufficient optimality condition in the form of the Pontryagin maximum principle, as well as in the general case for studying special control in discrete problems of optimal control of Rosser systems. Therefore, the established result can also be considered a contribution of the theory of optimal control problems of Rosser systems.

Keywords: Rosser type system, solution representations, linear difference equation.

References

1. *Gabasov R., Kirillova F. M. Optimizaciya linejnyh sistem* [Optimization of linear systems]. Mn. BSU. 1973. 248 p.

2. *Gajshun I. V. Mnogoparametricheskie sistemy upravleniya* [Multiparametric control systems]. Mn. Nauka i tekhnika. 1996. 200 p.

3. *Gajshun I. V. Sistemy s diskretnym vremenem* [Systems with discrete time]. Mn. IM NAS of Belarus. 2001. 400 p.

4. *Mansimov K. B. Diskretnye sistemy* [Discrete systems]. BSU. Baku. 2002. 114 p.

5. *Mansimov K. B. Optimizaciya odnogo klassa diskretnyh dvuhparametricheskih sistem* [Optimization of a class of discrete two-parameter systems] // *Differencial'nye uravneniya* – Differential Equations. 1991. Vol. 27. No. 2. Pp. 359–362.