МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

УДК 37.026 DOI 10.25730/VSU.0536.20.034

О роли задач с параметром для развития творческого потенциала учащихся

О. Л. Аманатова[1], И. В. Блудова[2]
[1]старший преподаватель кафедры «Основы математики и информатики» СУНЦ-1,
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана.
Россия, г. Москва. E-mail: olgaleonard2000@gmail.com
[2]кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
университетская гимназия (школа-интернат) МГУ имени М. В. Ломоносова.
Россия, г. Москва. E-mail: irinavbludova@gmail.com

Аннотация. Одной из целей образования является развитие способностей учащихся для подготовки их к исследовательской деятельности и развитию их творческой активности. Одним из инструментов для реализации этих целей является включение в курс математики средней школы различных задач с параметром. Поиск и анализ различных методов решения задач с параметром позволяет учителям включать задачи для развития творчества не только для детей, ориентированных на изучение точных наук, но и для гуманитариев. Анализировать и творчески исследовать различные профессиональные и жизненные ситуации необходимо всем людям, независимо от области их профессиональной деятельности. Задачи с параметром очень полезны для формирования психологической и практической готовности для вхождения выпускников школы во взрослую жизнь. Статья содержит примеры задач с параметром, допускающие как аналитические, так и графические способы решения. Такие многогранные задачи дают учителю возможность использовать их для работы с учащимися всех профильных направлений.

Ключевые слова: параметр, метод областей, расположение корней квадратного трехчлена.

Цели школьного математического образования, прежде всего, направлены на формирование личности и развитие творческих способностей человека. Понятно, что даже хорошо изученная теория, подкрепленная однотипными алгоритмами решения задач, не может служить инструментом для реализации задач развивающего образования. Поэтому для развития творческой активности учащихся, для подготовки к решению задач, которые со временем поставит жизнь, в курсе школьной математики возникла линия задач с параметром. К настоящему времени издано большое количество учебных пособий, посвященных решению задач с параметром. Однако создание методической базы таких задач до сих пор является задачей учителя.

В некоторых случаях изобилие материала затрудняет ориентацию учителей и учащихся, готовящихся к экзаменам самостоятельно. Иногда задачи с параметром рассматривают лишь как тяжеловесную добавку к школьному математическому образованию, которая по силам только особо одарённым детям. В некоторых случаях считают, что задачи с параметром специально придумали, чтобы выявлять категории учащихся, которые в дальнейшем смогут заниматься точными науками. Тем не менее знакомство с различными методами решения задач с параметром, анализом выбора того или иного метода решения могут быть полезны и «гуманитариям». Им тоже нужны задачи для развития мышления и творческого потенциала. Часто именно в момент включения в работу задач, требующих творческого исследования, появляются новые «любители математики», точнее, люди, которые склонны анализировать и творчески исследовать любые задачи, возникающие в жизни и профессии, независимо от сферы профессиональной деятельности.

Если перед учащимися, которые не планируют связывать себя с техническими или математическими специальностями, ставить только такие задачи, которые требуют лишь небольшого углубления в теорию и применения несложных правил и алгоритмов, то вполне ожидаемо, что математика для них будет сухой и скучной. А в дальнейшем они, возможно, и сами будут неинтересными людьми со скучной жизнью.

Задача учителя состоит в выборе задач и анализе методов. В статье [1] мы рассматривали задачи, которые предлагались учащимся с углубленным изучением математики и планирующим связать себя в дальнейшем с инженерией и точными науками. Однако не нужно думать, что такого рода задачи трудны или даже недоступны для остальных. Дети любят думать, обобщать и анализировать. Это естественная потребность мозга любого здорового человека. В статье [1] мы подробно изложили решение одного из вариантов. В частности, остановимся подробнее на методах решения задач с параметром, которые предлагались там под номером 8. Такие задачи красиво решаются так называемым методом областей. Этот метод получается из известного всем метода интервалов при переходе от координатной прямой к координатной плоскости.

В следующем примере (вариант 4, № 8) исследование фигуры, заданной на координатной плоскости уравнением, сильно упрощается вследствие того, что при любом раскрытии модулей это уравнение становится линейным, а значит, граница фигуры есть ломаная.

Пример 8 из варианта № 4. Найдите все значения параметра *a,* при которых уравнение $|x-a|+|x-1|=2$ имеет два различных корня. Запишите решения при найденных значениях параметра.

Решение. Рассмотрим координатную плоскость *xOa.* Так же, как и в одномерном случае, изменения будут происходить при переходе подмодульных выражений через ноль. Здесь нулями подмодульных выражений будут прямые $x=a$ и $x=1$. Они разбивают плоскость на четыре области. Расставим, например, взятием пробной точки, знаки подмодульных выражений в каждой из получившихся четырех областей. Раскроем модули в связи с соответствующими знаками и нарисуем получившиеся отрезки. Склеиваясь в точках, которые в силу непрерывности функции, лежат на границах областей, эти отрезки дают параллелограмм, изображенный на рисунке 1. Теперь с помощью «сканирующей прямой», в данном случае параллельной оси Ox, получим ответ $a \in (-1;3)$.

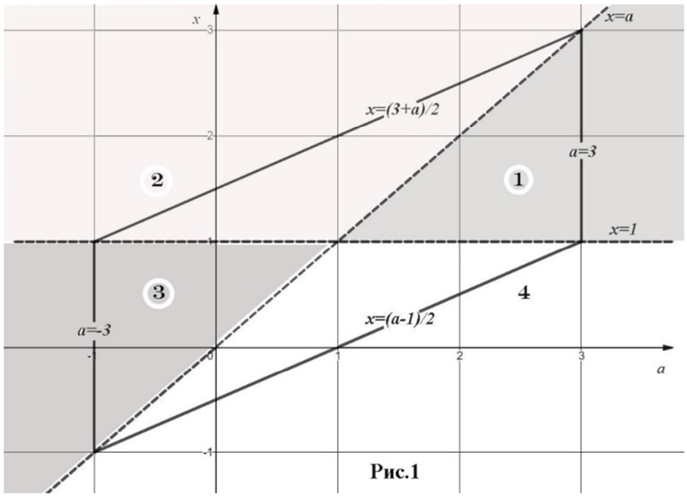


Рис.1

В следующем примере (вариант 2, № 8) при таком же методе решения получится еще более интересная фигура – «цветочек». Учащимся нравится, когда такой «цветочек» появляется на уроке математики, они при этом хорошо усваивают метод. Здесь «лепесточками» будут четверти соответствующих нужным областям окружностей.

Пример 8 из варианта № 2. Найдите все значения параметра *a,* при которых уравнение $x^2-|x-a|=|x+a|-a^2$ имеет единственное решение. Запишите это решение.

«Сканирующая прямая», при таком расположении осей параллельная оси Ox, пересечет получившуюся фигуру в одной точке при $a=-2$ и $a=2$. Это и есть ответ на вопрос задачи.

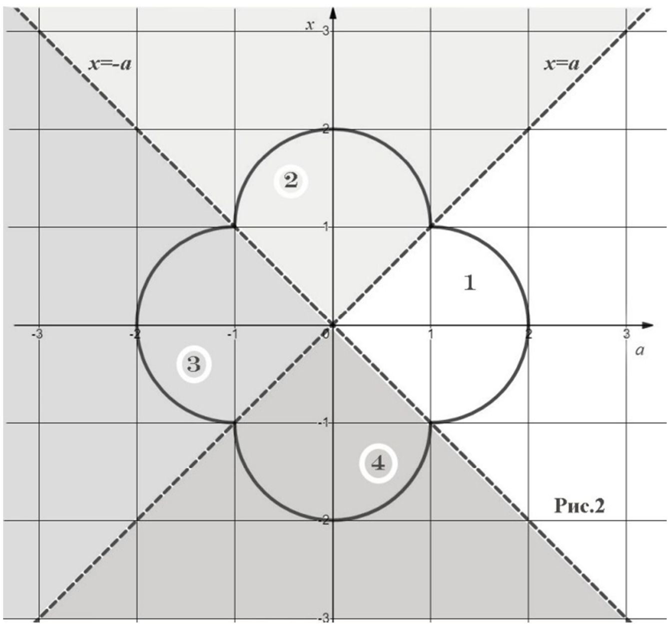


Рис.2

Предложенное в статье [1] решение задачи № 8 варианта 1 способствует развитию более глубокого понимания понятия модуля.

Пример 8 из варианта № 1. Найдите все значения параметра *a,* при которых уравнение $\left||x|-2\right|=-\dfrac{1}{2}x+a$ имеет ровно три корня. Выпишите решения при найденных значениях параметра.

Построим график функции $y=\left||x|-2\right|+\frac{1}{2}x$ и исследуем взаимное расположение этого графика с прямой $y = a$ при всевозможных значениях параметра a.

1) Пусть $|x|-a\ge 0$, то есть $|x|\ge 2 \iff \left[\begin{array}{l} x\ge 2,\\ x\le -2\end{array}\right.$, тогда $y=|x|-2+\frac{1}{2}x$. Далее имеем

при $x\ge 2$ $\quad y=x-2+\frac{1}{2}x=\frac{3}{2}x-2$,

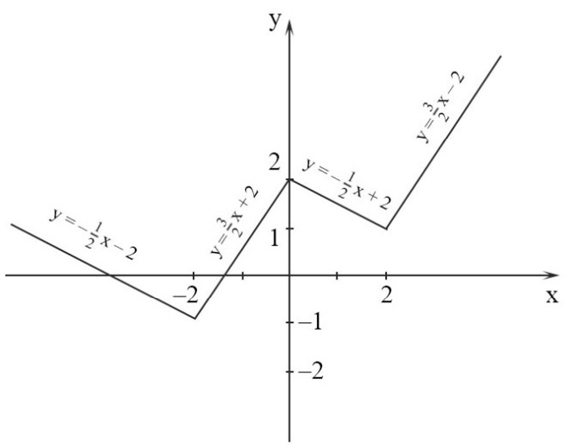
при $x\le -2$ $\quad y=-x-2+\frac{1}{2}x=-\frac{1}{2}x-2$.

2) Пусть $|x|-a\ge 0$, то есть $|x|<2 \iff -2<x<2$. В этом случае $y=-|x|+2+\frac{1}{2}x$.

При $0\le x<2$ $\quad y=-\frac{1}{2}+2$,

при $-2<x<0$ $\quad y=\frac{3}{2}x+2$.

Построим теперь график данной кусочно-линейной функции.



Теперь видно, что горизонтальные прямые $y=a$ пересекают полученный график в трех точках при $a=1$ и при $a=2$. Решениями уравнения являются абсциссы точек пересечения графиков $y=a$ и $y=\left||x|-2\right|+\frac{1}{2}x$. Найдем их и получим ответ.

Ответ:

при $a\in\{1\} \iff x\in\left\{-6;-\frac{2}{3};2\right\}$

при $a\in\{2\} \iff x\in\left\{-8;0;\frac{8}{3}\right\}$.

Пример 9 из варианта № 1. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\frac{(x-a)^2-6+a}{|x|-6}=0$ имеет единственное решение, большее или равное нулю.

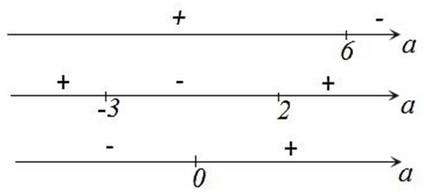
Решение. Переформулируем задачу следующим образом: найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^2-2ax+a^2+a-6=0$ (1) имеет единственное решение, не равное нулю и 6.

Исследуем знаки выражений для D, $\frac{f(0)}{1}$ и $x_в-0$.

$\frac{D}{4}=a^2-a^2+6-a=6-a$

$\frac{f(0)}{1}=a^2+a-6=(a+3)(a-3)$

$x_в-0=a$



Занесем эти знаки в таблицу в последнюю строку, запишем выводы.

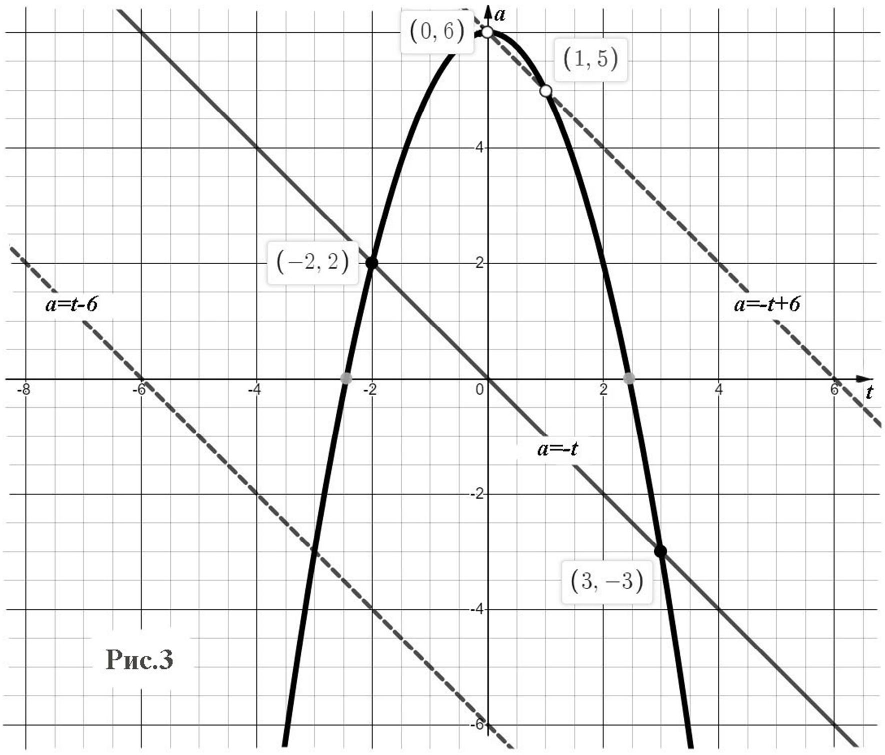
a	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;6)$	6	$(6;+\infty)$
D	+	+	+	+	+	+	+	0	-
$\frac{f(0)}{1}$	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$x_в - 0$	-	-	-	0	+	+	+	+	+
количество неотрицательных корней	Ø	1	1	1	1	1	2	1	Ø

Выясним теперь, при каких значениях параметра a уравнение (1) имеет корень, равный 6 (он не подходит по ОДЗ). Подставим x = 6 в уравнение (1) и увидим, что a = 5 или a = 6. Следовательно, в последней строке таблицы при $a = 5$ и $a = 6$ количество корней надо уменьшить на единицу.

Ответ: $a \in [-3;2) \cup \{5\}$.

Эту задачу можно предложить и «гуманитариям». Она допускает вполне симпатичное графическое решение.

Обозначим $x - a = t$, тогда $x = a + t$. Тогда уравнение примет вид: $\frac{t^2-6+a}{|t+a|-6} = 0$. Далее получим $a = -t^2 + 6$. В системе координат tOa это парабола. Так как требуется найти единственное неотрицательное решение, то $x = a + t \geq 0$, то есть $a \geq -t$. Учитывая, что знаменатель должен быть отличен от нуля, получим еще условия: $t \neq -a + 6$ и $t \neq -a - 6$. Изобразим всё это в системе координат tOa и считаем ответ с рисунка 3. Учитывая, что точки (1,5) и (0,6) «выколоты», получим ответ: $a \in [-3;2) \cup \{5\}$.



Список литературы

1. *Аманатова О. Л., Блудова И. В.* Семестровая работа, как хорошая традиция, приводящая к высоким результатам при обучении математике // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2015. Вып. 17. С. 193–207.

About the role of tasks with a parameter for the development of students' creative potential

O. L. Amanatova[1], I. V. Bludova[2]
[1]senior lecturer of the Department "Fundamentals of Mathematics and Computer Science" of SUNC-1 (Specialised Study-Scientific Center-1), Bauman Moscow State Technical University.
Russia, Moscow. E-mail: olgaleonard2000@gmail.com
[2]PhD in Physical and Mathematical Sciences, Lomonosov Moscow State University, University Gymnasium (boarding school) Moscow State University n. a. M. V. Lomonosov.
Russia, Moscow. E-mail: irinavbludova@gmail.com

Abstract. One of the goals of education is to develop students' abilities to prepare them for research activities and to develop their creative activity. One of the tools to achieve these goals is to include various parameter problems in the high school mathematics course. The search and analysis of various methods for solving problems with the parameter allows teachers to include tasks for the development of creativity not only for children focused on the study of exact sciences, but also for humanitarians. To analyze and creatively explore various professional and life situations is necessary for all people, regardless of the field of their professional activity. Tasks with the parameter are very useful for the formation of psychological and practical readiness for the entry of school graduates into adulthood. The article contains examples of problems with a parameter that allow both analytical and graphical solutions. Such multi-faceted tasks give the teacher the opportunity to use them to work with students of all specialized areas.

Keywords: parameter, method of areas, location of the roots of a quadratic trinomial.

References

1. *Amanatova O. L., Bludova I. V. Semestrovaya rabota, kak horoshaya tradiciya, privodyashchaya k vysokim rezul'tatam pri obuchenii matematike* [Semester work as a good tradition, contributing to the high results in the teaching of mathematics] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona* – Mathematical herald of teacher training universities and universities of the Volga-Vyatka region. 2015. Vol. 17. Pp. 193–207.