

Задачи с параметром, содержащие элементы геометрии

Э. Н. Беянова¹, И. В. Блудова²

¹кандидат физико-математических наук, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Бауманская инженерная школа № 1580. Россия, г. Москва. E-mail: elv-bel@mail.ru

²кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, университетская гимназия (школа-интернат) МГУ имени М. В. Ломоносова. Россия, г. Москва. E-mail: irinavbludova@gmail.com

Аннотация. В данной статье рассматриваются задачи с параметром, связанные с площадями некоторых плоских фигур. Идеи их решения основаны на свойствах конкретных геометрических фигур, а также на свойствах функций, входящих в условие.

Такие задачи помогают развивать связи между различными разделами математики, прежде всего алгебры и геометрии. Одной из основных целей включения задач с параметром в процесс обучения математики является формирование у учащихся исследовательских умений, связанных с овладением новых знаний. Важную роль при этом играет установление связи теоретических знаний с практикой. Для учащихся это в основном практика учебного процесса. Геометрия при этом оказывается разделом математики, которая представляется учащимся наиболее приближенной к практической деятельности. Помимо развития творческих способностей, задачи с параметром способствуют углублению и закреплению теоретических знаний, а также применению этих знаний в различных ситуациях.

Ключевые слова: задачи с параметром, площадь фигуры, координатная плоскость.

Многие процессы в различных областях науки, техники и практической деятельности человека часто приводят к самым разнообразным задачам, содержащим параметры. Их решение требует глубокого понимания сути процесса, проведения глубокого анализа и применения различных математических методов. Понятно, что такого рода задачи предстоит решать будущим исследователям и научным работникам. Конкурсные задачи, являясь прообразами таких задач, тоже требуют не просто глубокого понимания основ школьной математики, но и умения логически мыслить. Подготовка к их решению является творческим процессом, начинать который нужно как можно раньше. Задачи с параметрами можно предлагать почти после каждой изученной темы, учителю необходимо только правильно подобрать уровень сложности.

В данной статье мы рассматриваем задачи, связанные с площадями некоторых плоских фигур. Эти задачи служат развитию связей между различными разделами математики, прежде всего алгебры и геометрии. В их основе лежат свойства функций, входящих в условие. Все задачи допускают наглядную графическую интерпретацию. При этом идеи их решения основаны на свойствах конкретных геометрических фигур. Некоторые из представленных задач были ранее рассмотрены в статье [1].

Задача 1. Укажите все значения b , при которых прямые $y = 2x + b$, $y = -2x - b$, $y = 2x$, $y = -2x$ ограничивают на координатной плоскости фигуру, площадь которой равна 9.

Решение. Заметим, что угловые коэффициенты у двух пар прямых равны, поэтому данные прямые ограничивают на координатной плоскости параллелограмм (рис. 1). Координаты вершин этого параллелограмма будут следующими:

- 1) $A: 2x + b = -2x, A\left(-\frac{b}{4}; \frac{b}{2}\right);$
- 2) $B: 2x = -2x, B(0; 0);$
- 3) $C: -2x - b = 2x, C\left(-\frac{b}{4}; -\frac{b}{2}\right);$
- 4) $D: 2x + b = -2x - b, D\left(-\frac{b}{2}; 0\right).$

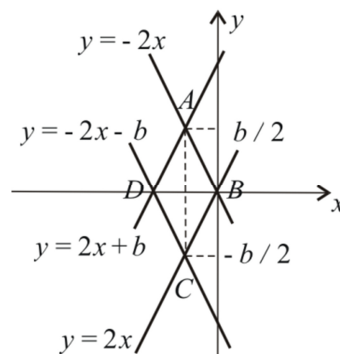


Рис. 1

Поскольку совпадают абсциссы точек A и C , а также ординаты точек B и D , следовательно, диагонали параллелограмма перпендикулярны, то есть параллелограмм $ABCD$ является ромбом. Поэтому

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD| = \frac{1}{2}|b| \left| \frac{b}{2} \right| = \frac{1}{4}b^2 = 9. \text{ Получаем } b = \pm 6.$$

Ответ: ± 6 .

Задача 2. Укажите все значения a , при которых прямые $y = 2x + a$, $y = 2x - a$, $y = x + a$, $y = x - a$ ограничивают на координатной плоскости фигуру, площадь которой равна 36.

Решение. Заметим, что угловые коэффициенты у двух пар прямых равны, поэтому данные прямые ограничивают на координатной плоскости параллелограмм (рис. 2). Координаты вершин этого параллелограмма будут следующими:

- 1) $A: 2x + a = x + a, A(0; a);$
- 2) $B: 2x - a = x + a, B(2a; 3a);$
- 3) $C: 2x - a = x - a, C(0; -a);$
- 4) $D: 2x - a = x + a, D(-2a; -3a).$

Поскольку абсциссы точек A и C равны нулю, то эти точки принадлежат оси y и параллелограмм можно разбить диагональю AC на два равных треугольника так, что

$$S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2}|AC| \cdot |x_B| = |2a| \cdot |2a| = 4a^2 = 36.$$

Получаем $a = \pm 3$.

Ответ: ± 3 .

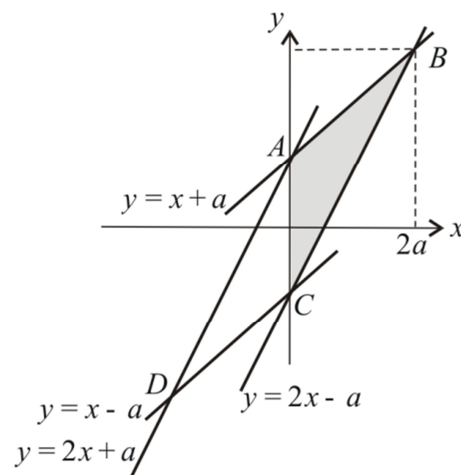


Рис. 2

Задача 3. Укажите все значения a , при которых ось абсцисс и прямые $x = a + 5$, $x = a + 1$, $y = (a - 3)x$ ограничивают на координатной плоскости четырехугольник, площадь которого равна 28.

Решение. Прямые $x = a + 5$, $x = a + 1$ – вертикальные, и при любом значении параметра a расстояние между ними равно 4. Прямая $y = (a - 3)x$ проходит через начало координат. Данные прямые и ось абсцисс ограничивают на координатной плоскости четырехугольник, если либо $a + 1 > 0$, либо $a + 5 < 0$.

Четырехугольник, ограниченный осью абсцисс и указанными прямыми является прямоугольной трапецией, высота которой равна 4 (рис. 3).

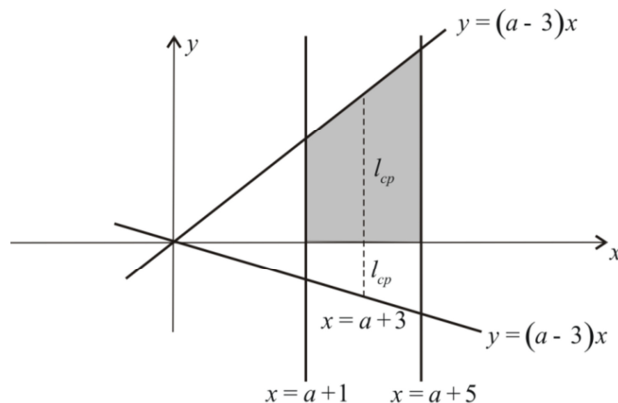


Рис. 3

Площадь трапеции $S_{\text{трап}} = l_{\text{ср}} \cdot h$ есть произведение средней линии на высоту. При любом значении параметра a средней линией трапеции является отрезок прямой $x = a + 3$, заключенный между осью абсцисс и прямой $y = (a - 3)x$. Следовательно, длина средней линии трапеции равна модулю значения функции $y = (a - 3)x$ в точке $x = a + 3$. Таким образом,

$$\begin{cases} S = |(a - 3)(a + 3)| \cdot 4 = 28 \\ \begin{cases} a < -5 \\ a > -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a^2 - 9| = 7 \\ \begin{cases} a < -5 \\ a > -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = \sqrt{2} \end{cases}$$

Ответ: $\sqrt{2}; 4$.

Задача 4. Укажите все значения a , при которых оси координат и прямые $y = -a^2x + 3a^2 + 2$, $y = -a^2x + 2a^2 + 1$ ограничивают на координатной плоскости фигуру, площадь которой равна 8.

Решение. Значение параметра a не может равняться нулю, в противном случае прямые совпадают и не будут ограничивать фигуру. Заметим далее, что данные прямые параллельны и их угловой коэффициент меньше нуля (для $a \neq 0$). Так как $3a^2 + 2 > 2a^2 + 1$ при любых значениях a , то искомая фигура является трапецией, которая лежит в первой координатной четверти (рис. 4). Найдем точки пересечения прямых $y = -a^2x + 3a^2 + 2$, $y = -a^2x + 2a^2 + 1$ с осью абсцисс,

это будут точки $\left(\frac{3a^2 + 2}{a^2}; 0\right)$ и $\left(\frac{2a^2 + 1}{a^2}; 0\right)$ соответственно. Найдем площадь фигуры как разность площадей треугольников, ограниченных координатными осями и нашими прямыми.

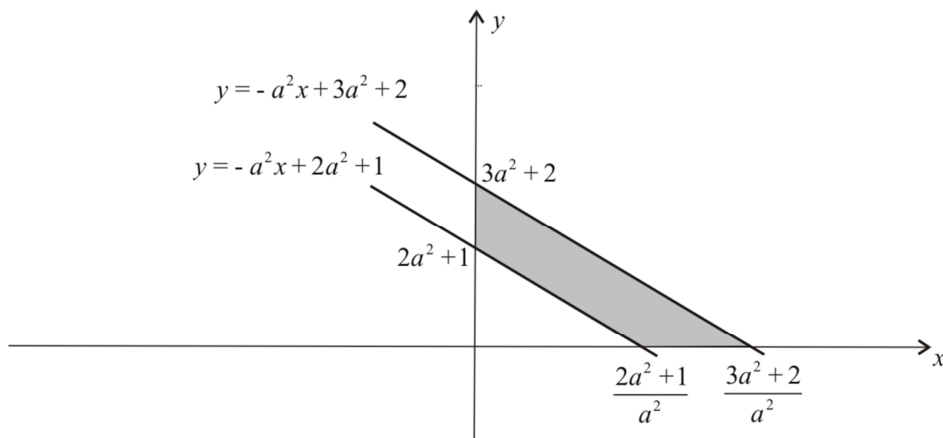


Рис. 4

Имеем $S = \frac{(3a^2 + 2)^2}{2a^2} - \frac{(2a^2 + 1)^2}{2a^2} = 8$, откуда получаем уравнение

$$5a^4 - 8a^2 + 3 = 0. \text{ Решая его, находим, что } a = \pm 1, a = \pm \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Ответ: $a = \pm 1, a = \pm \sqrt{\frac{3}{5}}$.

Задача 5. Укажите все значения b , при которых график функции $y = x^2 - 2(b+3)x + b^2 + 5$ с вершиной в точке A пересекает ось x в точках B и C так, что площадь треугольника ABC равна 64.

Решение. Найдем высоту треугольника ABC (рис. 5). Она равна $|y_A| = \frac{D}{4}$, основание треугольника равно $CB = x_2 - x_1 = \sqrt{D}$. Значит, площадь треугольника ABC равна $S = \frac{D\sqrt{D}}{8}$.

Для данной квадратичной функции $D = 4(b+3)^2 - 4(b^2 + 5) = 24b + 16$. Имеем $\frac{\sqrt{(24b+16)^3}}{8} = 64$, откуда $b = 2$. Ответ: 2.

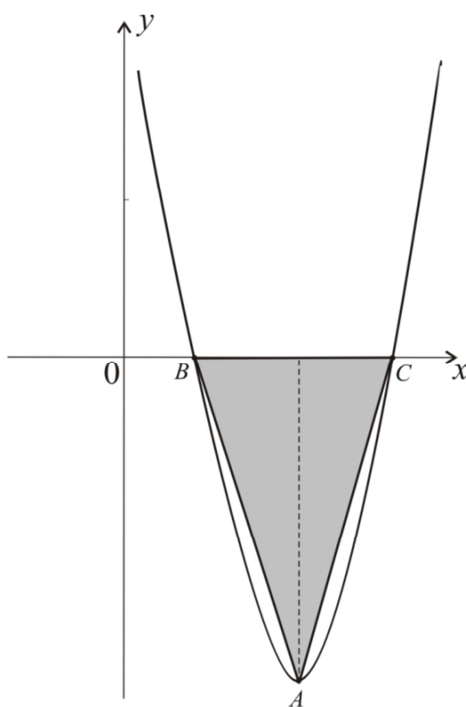


Рис. 5

Задача 6. Найдите площадь треугольника с вершинами в точках пересечения графика функции $y = (x-4)(x^2 - 3a^2x - 3x + 2a^4 + 5a^2 + 2)$ с осями координат, если известно, что данный график имеет ровно три такие точки пересечения.

Решение. Так как $y(0) = -4(2a^4 + 5a^2 + 2)$, то точка пересечения с осью y найдена. Найдем точки пересечения графика с осью x (нули функции):

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x^2 - 3a^2x - 3x + 2a^4 + 5a^2 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 2a^2 + 1 \\ x_3 = a^2 + 2 \end{cases}$$

Так как по условию график пересекает координатные оси ровно в трех точках, следовательно, должны совпадать два из трех нулей функции. Рассмотрим три случая: 1) $x_1 = x_2 = 4$ (см. рис. 6), тогда

$$4 = 2a^2 + 1 \Leftrightarrow a^2 = \frac{3}{2}, \text{ значит } x_3 = \frac{7}{2}, y(0) = -56, \text{ следовательно, } S = \frac{1}{2}(x_1 - x_3) \cdot |y(0)| = 14;$$

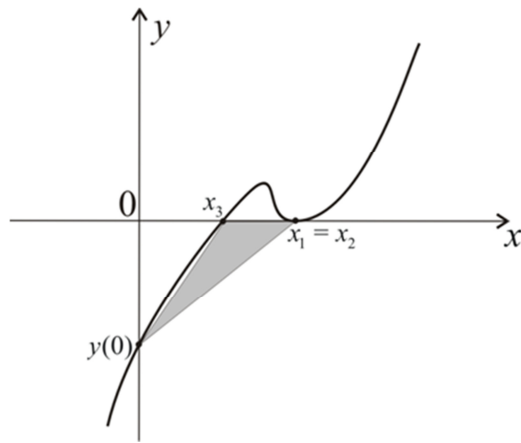


Рис. 6

2) $x_1 = x_3 = 4$ (рис. 7), тогда $4 = a^2 + 2 \Leftrightarrow a^2 = 2$, значит $x_2 = 5$, $y(0) = -80$, следовательно, $S = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \cdot |y(0)| = 40$;

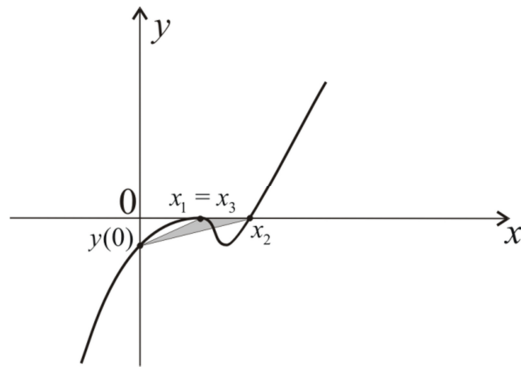


Рис. 7

3) $x_2 = x_3$ (рис. 8), тогда $a^2 + 2 = 2a^2 + 1 \Leftrightarrow a = 1$, значит $x_{2,3} = 3$, $y(0) = -36$, следовательно, $S = \frac{1}{2}(x_1 - x_2) \cdot |y(0)| = 18$.

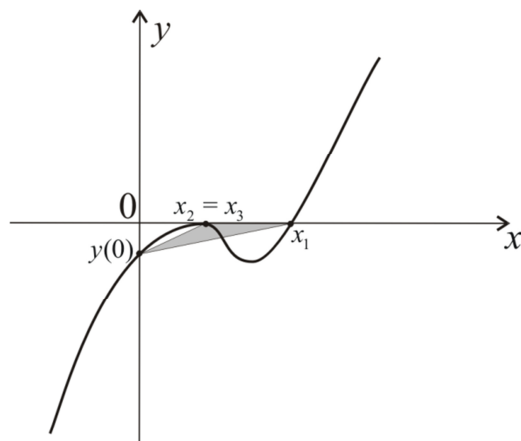


Рис. 8

Ответ: 14; 40; 18.

Задача 7. Укажите все значения a , при которых площадь фигуры, удовлетворяющей на плоскости (x, y) системе неравенств:

$$\begin{cases} (y+2)^2 \leq 36 \\ y^2 + x^2 - 2ay \leq 36 - a^2 \end{cases} \quad \text{больше или равна } 18\pi.$$

Решение. Поскольку $(y+2)^2 \leq 36 \Leftrightarrow (y-4)(y+8) \leq 0$, то первому неравенству системы удовлетворяют точки плоскости, представляющие собой полосу, ограниченную прямыми $y = 4$ и $y = -8$.

Так как $y^2 + x^2 - 2ay \leq 36 - a^2 \Leftrightarrow x^2 + (y-a)^2 \leq 36$, то второму неравенству системы удовлетворяют все точки круга радиуса 6 с центром в точке $(0; a)$. При изменении параметра a центр данного круга движется по оси y (рис. 9).

Решением системы неравенств является пересечение найденных множеств, поэтому вычислим, какую часть площади круга составляет 18π . Радиус круга равен 6, площадь равна 36π , следовательно, искомое множество занимает не менее половины круга.

Это условие выполняется тогда и только тогда, когда ордината центра круга принимает значения от -8 до 4 включительно, т. е. $a \in [-8; 4]$.

Ответ: $[-8; 4]$.

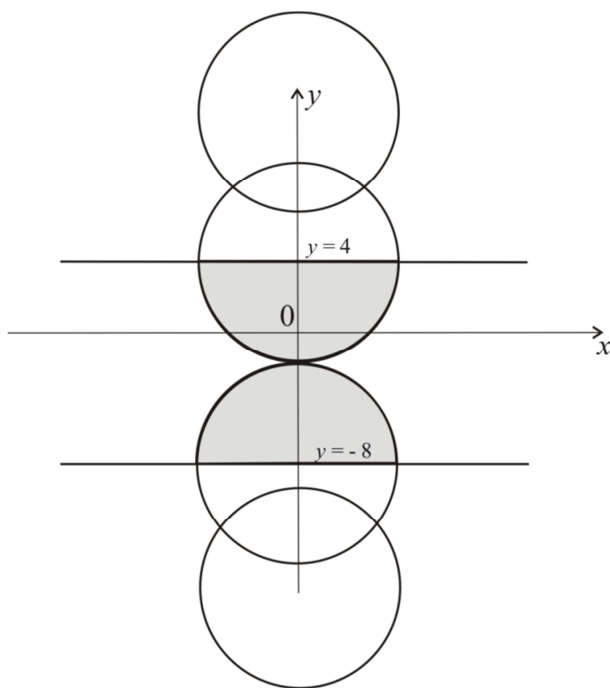


Рис. 9

Задача 8. Укажите все значения a , при которых площадь фигуры, удовлетворяющей на плоскости (x, y) системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 2x + y^2 - 6y - 6 \leq 0 \\ y \geq |x - a| + 2 - a \end{cases} \quad \text{, больше, чем } 4\pi.$$

Решение. Поскольку $x^2 + 2x + y^2 - 6y - 6 \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-3)^2 \leq 16$, то множество точек плоскости, удовлетворяющих первому неравенству системы, представляет собой круг радиуса 4 с центром в точке с координатами $(-1; 3)$. Второму неравенству системы удовлетворяют все точки плоскости, расположенные не ниже графика функции $y = |x - a| + 2 - a$. Графиком

этой функции является «уголок» модуля, вершина которого имеет координаты $(a, 2 - a)$, следовательно, вершина лежит на прямой $y = 2 - x$. Заметим, что прямая $y = 2 - x$ проходит через центр найденного выше круга (рис. 10).

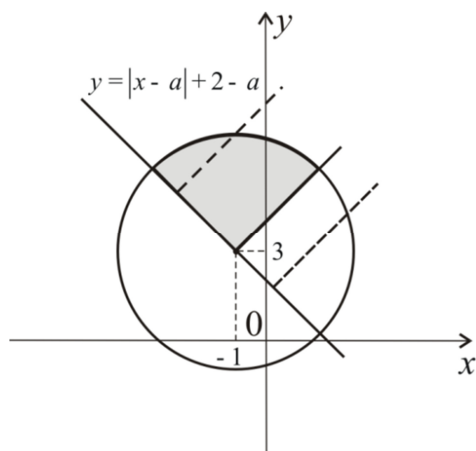


Рис. 10

Поскольку решением системы неравенств является пересечение множеств, найдем, какую часть круга составляет 4π . Радиус круга равен 4, площадь равна 16π , значит, искомое множество занимает более четверти круга. Это условие выполняется тогда и только тогда, когда абсцисса вершины графика модуля больше -1 , т. е. $a > -1$.

Ответ: $a \in (-1; +\infty)$.

Список литературы

1. Белянова Э. Н., Блудова И. В. Немного о площади фигур в задачах с параметрами // Математика. Первое сентября. 2015. Вып. 10. С. 25–28.

Problems with a parameter containing elements of geometry

E. N. Belyanova¹, I. V. Bludova²

¹PhD in Physical and Mathematical Sciences,
Bauman Moscow State Technical University, Bauman Engineering School No. 1580.
Russia, Moscow. E-mail: elv-bel@mail.ru

²PhD in Physical and Mathematical Sciences, Lomonosov Moscow State University,
University Gymnasium (boarding school) Lomonosov Moscow State University.
Russia, Moscow. E-mail: irinavbludova@gmail.com

Abstract. In this article, we consider problems with the parameter associated with the areas of some flat shapes. The ideas for solving them are based on the properties of specific geometric shapes, as well as on the properties of the functions included in the condition.

Such tasks help to develop connections between different branches of mathematics, primarily algebra and geometry. One of the main goals of including problems with a parameter in the process of teaching mathematics is the formation of students' research skills related to the acquisition of new knowledge. An important role is played by establishing the connection between theoretical knowledge and practice. For students, this is mainly the practice of the educational process. At the same time, geometry turns out to be a branch of mathematics, which is considered by students to be the closest to practical activity. In addition to developing creative abilities, tasks with the parameter contribute to the deepening and consolidation of theoretical knowledge, as well as the application of this knowledge in various situations.

Keywords: problems with a parameter, shape area, coordinate plane.

References

1. Belyanova E. N., Bludova I. V. *Nemnogo o ploshchadi figur v zadachah s parametrami* [A little bit about the area of figures in problems with parameters] // *Matematika. Pervoe sentyabrya* – Mathematics. The first of September. 2015. Is. 10. Pp. 25–28.