УДК 539.21:621.865.8 DOI 10.25730/VSU.0536.20.040

Принцип Гаусса в обобщенных координатах в задачах динамики твердого тела на примере робота-манипулятора типа «Версатран»

А. П. Левашов[1], О. Ю. Медведев[2]

[1]кандидат технических наук, доцент, Вятский государственный университет.
Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0001-5899-8414. E-mail: usr06296@vyatsu.ru

[2]кандидат технических наук, доцент, Вятский государственный университет.
Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0001-9848-0839. E-mail: usr08307@vyatsu.ru

Аннотация. В статье рассмотрено получение дифференциальных уравнений движения механической системы, соответствующих уравнениям Лагранжа II рода с использованием выражений кинетической энергии системы в обобщенных координатах и обобщенных сил. Методика базируется на принципе наименьшего принуждения Гаусса. Целью данной работы является получение с использованием данного принципа дифференциальных уравнений динамики в обобщенных координатах для различных видов движения на примере манипулятора типа «Версатран», который может быть использован для сортировки и утилизации отходов при создании роботизированных заводов с использованием манипуляторов.

Ключевые слова: роботы-манипуляторы, утилизация отходов, вариационные принципы, математическая модель, принуждение по Гауссу, поле ускорений, условия стационарности, механическая система, дифференциальные уравнения, динамика твердого тела.

Математическое моделирование прочно занимает одно из центральных мест в исследованиях процессов различной физической природы, а также при проектировании оптимальных конструкций во всех областях науки и техники, и переработка отходов жизнедеятельности человека не является исключением. Во всем мире остро стоит вопрос управления твердыми бытовыми отходами от их образования, сбора, хранения, переработки, восстановления, транспортировки и удаления. Эти вопросы изучаются с помощью тематических исследований. В зарубежных источниках [8] обсуждается сокращение количества отходов и делаются попытки способствовать внедрению интегрированных систем управления твердыми отходами, которые являются рентабельными и защищают здоровье человека и окружающую среду.

Обострение экологической обстановки в нашей стране связано с отсутствием в России необходимого числа мусороперерабатывающих заводов. Те заводы, которые есть в стране, используют на этапе сортировки значительную долю ручного труда. В России не существует абсолютно автоматизированных заводов. Актуальной задачей является создание таких заводов, что позволяет решить ряд проблем: 1) исключить использование человеческих ресурсов при сборе мусора (роботы-манипуляторы собирают и сортируют мусор); 2) снизить время утилизации отходов (автоматы это делают быстрее и круглосуточно). В местах, отведенных для хранения мусора, можно использовать манипуляторы, поэтапно сортирующие отходы. Поэтому необходим эффективный способ реализации сбора отходов и его сортировки на начальном этапе и механизации-автоматизации процесса утилизации бытовых и промышленных отходов как важной составляющей нормального существования человека в связи с возрастающими объемами образования этих продуктов от жизнедеятельности человека [3].

Построение математических моделей функционирования исследуемых механических систем, к которым относятся и роботы-манипуляторы, может быть основано как на фундаментальных законах природы, установленных в различных областях науки, так и на привлечении вариационных принципов. При использовании вариационных принципов действительное течение процесса (действительное движение механической системы) отбирается из всех возможных вариантов развития процесса (возможных движений системы) по определенному условию. Обычно это условие состоит в том, что некоторый показатель, связанный с исследуемым процессом или системой, достигает экстремального значения в ходе действительного развития процесса (при действительном движении механической системы). Запись условий экстремума выбранного показателя в математической форме приводит к дифференциальным уравнениям, представляющим математическую модель исследуемого процесса.

В дифференциальном вариационном принципе Гаусса таким показателем является так называемое принуждение.

Принцип получил существенное развитие в многочисленных теоретических исследованиях российских и зарубежных ученых [9]. Проведенный обзор работ по теоретической механике и аналитической динамике [2; 6; 7; 10] выявил отсутствие примеров практического применения принципа Гаусса для вывода дифференциальных уравнений различных видов движения твердого тела или системы твердых тел.

Целью данной работы является вывод с помощью принципа Гаусса дифференциальных уравнений, описывающих динамику твердого тела и системы твердых тел, совершающих различные движения на примере манипулятора типа «Версатран», который может быть применен при проектировании и строительстве заводов по утилизации отходов.

Новизна состоит в том, что при использовании данного принципа получение дифференциальных уравнений сложного движения робота-манипулятора, имеющего неголономные связи, будет гораздо быстрее и точнее, что приведет к уменьшению затрат на проектирование и эксплуатацию мусороперерабатывающих комплексов.

Объекты и методы исследований. Принцип Гаусса является исключительно общим дифференциальным вариационным принципом механики. В стационарных точках принуждение будет иметь минимум. Как известно [11], аналитическое выражение принуждения по Гауссу для несвободной механической системы имеет вид:

$$Z = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \left[\left(\ddot{x}_k - \frac{F_{kx}}{m_k} \right)^2 + \left(\ddot{y}_k - \frac{F_{ky}}{m_k} \right)^2 + \left(\ddot{z}_k - \frac{F_{kz}}{m_k} \right)^2 \right], \qquad (1)$$

где N – число точек механической системы;

$\vec{F}_k$ – равнодействующая активных сил, действующих на точку M_k;

$\dfrac{\vec{F}_k}{m_k}\left(\dfrac{F_{kX}}{m_k}, \dfrac{F_{kY}}{m_k}, \dfrac{F_{kZ}}{m_k}\right)$ $(k = 1, 2, \cdots, N)$ – ускорение точки M_k в свободном движении (только под действием заданных сил и при отсутствии связей);

$\vec{a}_k(\ddot{x}_k, \ddot{y}_k, \ddot{z}_k)$ $(k = 1, 2, \cdots, N)$ – ускорение точки M_k в кинематически возможном движении (под действием как заданных сил, так и реакций связей).

Для твердого тела общее выражение принуждения по Гауссу можно записать в виде:

$$\begin{gathered} Z = \left\{ \left(\frac{1}{2}\int\limits_{(V)} a_x^2 \cdot \rho dV - \int\limits_{(V)} a_x \cdot F_x^e \cdot dV \right) + \left(\frac{1}{2}\int\limits_{(V)} a_y^2 \cdot \rho dV - \int\limits_{(V)} a_y \cdot F_y^e \cdot dV \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2}\int\limits_{(V)} a_z^2 \cdot \rho dV - \int\limits_{(V)} a_z \cdot F_z^e \cdot dV \right) \right\} + \cdots \end{gathered}, \qquad (2)$$

где $\rho(x, y, z)$ – плотность вещества тела в выделенном элементарном объеме, принимаемом в дальнейшем за материальную точку;

a_x, a_y, a_z – компоненты векторного поля ускорений данной точки твердого тела, отнесенные к осям выбранной системы координат;

F_x^e, F_y^e, F_z^e – проекции внешних активных сил, действующих на данную точку тела, на выбранные оси координат; точками обозначены слагаемые, не зависящие от ускорений, а интеграл распространяется на весь объем, занимаемый телом.

При выводе уравнений движения механической системы часто бывает целесообразно выразить декартовы координаты точек системы через обобщенные координаты. В этом случае принуждение по Гауссу для системы также необходимо выразить через выбранные обобщенные координаты.

Покажем, что уравнения движения механической системы в обобщенных координатах, полученные с помощью принципа Гаусса, полностью соответствуют уравнениям Лагранжа II рода, составленным для рассматриваемой системы с использованием выражений кинетической энергии системы в обобщенных координатах и обобщенных сил.

Пусть на рассматриваемую механическую систему наложены голономные стационарные связи. Учитывая эти связи, введем обобщенные координаты и выразим через них декартовых координат точек механической системы:

$$x_K = x_K(q_1, q_2, \cdots, q_n), y_K = y_K(q_1, q_2, \cdots, q_n), z_K = z_K(q_1, q_2, \cdots, q_n)(k = \overline{1, N}), \quad (3)$$

где $N -$ число точек механической системы, а $n -$ число степеней свободы системы. Двукратно дифференцируя по времени зависимости (3), получим выражения проекций ускорений точек системы на оси декартовых координат через выбранные обобщенные координаты и их производные:

$$\ddot{x}_K = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_K}{\partial q_i} \ddot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 x_K}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j \ (K = 1, 2, \cdots, N)$$

$$\ddot{y}_K = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_K}{\partial q_i} \ddot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 y_K}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j \ (K = 1, 2, \cdots, N). \quad (4)$$

$$\ddot{z}_K = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z_K}{\partial q_i} \ddot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 z_K}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j \ (K = 1, 2, \cdots, N)$$

Условие экстремума принуждения (1) по обобщенным ускорениям в данном случае будет иметь вид:

$$\delta Z = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{K=1}^{N} \left[\frac{\partial Z}{\partial \ddot{x}_K} \cdot \frac{\partial \ddot{x}_K}{\partial \ddot{q}_i} + \frac{\partial Z}{\partial \ddot{y}_K} \cdot \frac{\partial \ddot{y}_K}{\partial \ddot{q}_i} + \frac{\partial Z}{\partial \ddot{z}_K} \cdot \frac{\partial \ddot{z}_K}{\partial \ddot{q}_i} \right] \right) \cdot \delta \ddot{q}_i = 0. \quad (5)$$

В силу независимости вариаций $(\delta\ddot{q}_1, \delta\ddot{q}_2, \cdots, \delta\ddot{q}_n)$ уравнения движения системы в обобщенных координатах примут вид:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{K=1}^{N} \left\{ m_K \cdot \left\langle \frac{\partial x_K}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial x_K}{\partial q_i} + \frac{\partial y_K}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial y_K}{\partial q_i} + \frac{\partial z_K}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial z_K}{\partial q_i} \right\rangle \right\} \right) \cdot \ddot{q}_j -$$

$$-\sum_{K=1}^{N} \left(F_{KX}^e \cdot \frac{\partial x_K}{\partial q_i} + F_{KY}^e \cdot \frac{\partial y_K}{\partial q_i} + F_{KY}^e \cdot \frac{\partial z_K}{\partial q_i} \right) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \left\{ \sum_{K=1}^{N} m_K \cdot \left(\frac{\partial^2 x_K}{\partial q_j \partial q_l} \cdot \frac{\partial x_K}{\partial q_i} + . \right. \right. \quad (6)$$

$$\left. \left. + \frac{\partial^2 y_K}{\partial q_j \partial q_l} \cdot \frac{\partial y_K}{\partial q_i} + \frac{\partial^2 z_K}{\partial q_j \partial q_l} \cdot \frac{\partial z_K}{\partial q_i} \right) \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_l \right\} = 0 \ (i = \overline{1, n})$$

Множители $\sum_{K=1}^{N} \left\{ m_K \cdot \left\langle \frac{\partial x_K}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial x_K}{\partial q_i} + \frac{\partial y_K}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial y_K}{\partial q_i} + \frac{\partial z_K}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial z_K}{\partial q_i} \right\rangle \right\}$ в формуле (6) представляют матрицу обобщенных коэффициентов инерции механической системы, а выражения $\sum_{K=1}^{N} \left(F_{KX}^e \cdot \frac{\partial x_K}{\partial q_i} + F_{KY}^e \cdot \frac{\partial y_K}{\partial q_i} + F_{KY}^e \cdot \frac{\partial z_K}{\partial q_i} \right)$ определяют обобщенные силы механической системы $Q_i \ (i = \overline{1, n})$.

С учетом вышесказанного, уравнения движения механической системы (6) можно записать в виде:

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{n} a_{jl} \cdot \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial a_{jl}}{\partial q_l} \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_l = Q_i \ (i = \overline{1, n}). \quad (7)$$

Уравнения (7) представляют явную форму записи дифференциальных уравнений Лагранжа II рода.

Полученные уравнения применимы для вывода дифференциальных уравнений движения манипулятора типа «Версатран» [4], изображенного на рис. 1. Трением в кинематических парах будем пренебрегать.

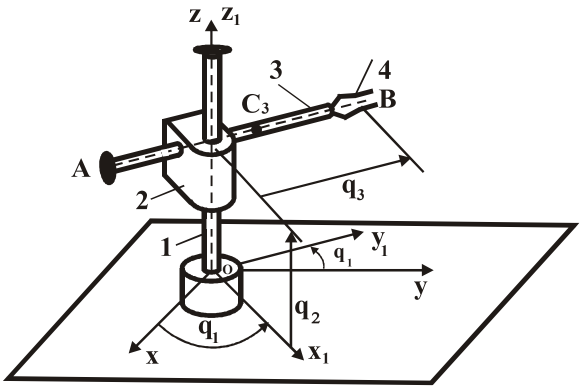

Рис. 1

Механизм робота-манипулятора типа «Версатран» состоит из поворотной колонны 1, траверсы 2, осуществляющей вертикальное перемещение, и выдвигающейся руки 3, несущей схват 4 (рис. 1).

Момент инерции колонны 1 относительно оси ее поворота равен J_{Z1}. Масса траверсы 2 равна m_2, а ее момент инерции относительно центра масс равен J_{ZC2}. Выдвигающаяся рука 3 со схватом имеет массу m_3 и длину AB = L, а расстояние от упора руки A до ее центра масс AC_3 = d. Момент инерции выдвигающейся руки 3 относительно оси, проходящей через центр масс C_3 параллельно оси вращения колонны, равен J_{ZC3}. Поворот колонны относительно оси OZ происходит под действием управляющего момента $M_{упр}$. Поступательное движение траверсы 2 в вертикальном направлении обеспечивается действием управляющей силы $F_{упрz}$, а поступательное движение руки со схватом обеспечивается действием управляющей силы $F_{упрy}$.

Принуждение по Гауссу для колонны 1, вращающейся вокруг неподвижной оси OZ, выражается формулой:

$$Z_1 = \frac{1}{2} J_{Z1} \left(\ddot{\varphi} - \frac{M_{Z1упр}}{J_{Z1}} \right)^2 .$$

Для траверсы 2, вращающейся вокруг неподвижной оси OZ (переносное движение) и движущейся поступательно вдоль этой оси (относительное движение), принуждение выражается формулой:

$$Z_2 = Z_{2вращ}^{пер} + Z_{2пост}^{отн} = \frac{1}{2} J_{Z2} \left(\ddot{\varphi} - \frac{M_{Z2упр}}{J_{Z2}} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\ddot{z} - \frac{-m_2 g + F_{Z2упр}}{m_2} \right)^2 ,$$

где $J_{Z2} = J_{ZC2} + m_2 a^2$ – момент инерции траверсы относительно оси вращения колонны.

Выдвижная рука со схватом 3 совершает сложное движение. Оно состоит из относительного движения (поступательного движения вдоль оси ОУ) и переносного движения (поступательного движения вдоль оси OZ и вращения вокруг этой оси). Принуждение по Гауссу для выдвижной руки будет определяться формулой:

$$Z_3 = Z_{3вращ}^{пер} + Z_{3пост}^{пер} + Z_{3постX}^{отн} + Z_{3постY}^{отн} = \frac{1}{2} J_{Z3} \left(\ddot{\varphi} - \frac{M_{Z3упр}}{J_{Z3}} \right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} m_3 \left(\ddot{z} - \frac{-m_3 g + F_{Z3упр}}{m_3} \right)^2 + \frac{1}{2} m_3 \left(a_{C3x} - \frac{F_{X3упр}}{m_3} \right)^2 + \frac{1}{2} m_3 \left(a_{C3y} - \frac{F_{Y3упр}}{m_3} \right)^2 ,$$

где $a_{C3x} = -2\dot{\varphi}\dot{y}_{C3} + \dot{\varphi}^2 b - \ddot{\varphi} y$ – проекция на ось ОУ абсолютного ускорения центра масс руки манипулятора со схватом; $F_{X3упр} = 0;$

$a_{C3y} = \ddot{y}_{C3} - y_{C3}\dot{\varphi}^2 - b\ddot{\varphi}$ – проекция на ось ОУ абсолютного ускорения центра масс руки манипулятора со схватом;

$J_{Z3} = J_{ZC3} + m_3 \cdot (b^2 + y^2)$ – момент инерции руки манипулятора со схватом относительно оси вращения колонны.

Окончательно принуждение по Гауссу для всего манипулятора можно представить в виде:

$$Z = Z_1 + Z^{\text{пер}}_{2\text{вращ}} + Z^{\text{отн}}_{2\text{пост}} + Z^{\text{пер}}_{3\text{вращ}} + Z^{\text{пер}}_{3\text{пост}} + Z^{\text{отн}}_{3\text{постX}} + Z^{\text{отн}}_{3\text{постY}} =$$

$$= \frac{1}{2}J_{Z1}\left(\ddot{\varphi} - \frac{M_{Z1\text{упр}}}{J_{Z1}}\right)^2 + \frac{1}{2}J_{Z2}\left(\ddot{\varphi} - \frac{M_{Z2\text{упр}}}{J_{Z2}}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\ddot{z} - \frac{-m_2 g - F_{Z2\text{упр}}}{m_2}\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{2}J_{ZC3}\left(\ddot{\varphi} - \frac{M_{Z3\text{упр}}}{J_{ZC3}}\right)^2 + \frac{1}{2}m_3\left(\ddot{z} - \frac{-m_3 g - F_{Z3\text{упр}}}{m_3}\right)^2 + \quad . \quad (8)$$

$$+\frac{1}{2}m_3\left(-2\dot{\varphi}\dot{y}_{C3} + \dot{\varphi}^2 b - \ddot{\varphi} y\right)^2 + \frac{1}{2}m_3\left(\ddot{y}_{C3} - y_{C3}\dot{\varphi}^2 - b\ddot{\varphi} - \frac{F_{Y3\text{упр}}}{m_3}\right)^2$$

Условия стационарности принуждения (8) по обобщенным ускорениям имеют вид:

$$\frac{\partial Z}{\partial \ddot{\varphi}} = [J_{Z1} + J_{Z2} + J_{ZC3} + m_3 \cdot (b^2 + y^2)]\ddot{\varphi} + 2m_3\dot{\varphi}\dot{y}_{C3} - m_3 e\ddot{y}_{C3} - \sum M_{Z\text{упр}} = 0;$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \ddot{z}} = (m_2 + m_3)\ddot{z} + (m_2 + m_3)g - \sum F_{Z\text{упр}} = 0; \quad (9)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \ddot{y}} = m_3\ddot{y}_{C3} - m_3 y_{C3}\dot{\varphi}^2 - m_3 e\ddot{\varphi} - \sum F_{Y\text{упр}} = 0.$$

Из условий (9) получаем дифференциальные уравнения движения манипулятора:

$$m_3\ddot{y}_{C3} = m_3 y_{C3}\dot{\varphi}^2 + m_3 e\ddot{\varphi} + \sum F_{Y\text{упр}};$$

$$(m_2 + m_3)\ddot{z} = -(m_2 + m_3)g + \sum F_{Z\text{упр}}; \quad . \quad (10)$$

$$[J_{Z1} + J_{Z2} + J_{ZC3} + m_3 \cdot (b^2 + y^2)]\ddot{\varphi} = -2m_3\dot{\varphi}\dot{y}_{C3} + m_3 e\ddot{y}_{C3} + \sum M_{Z\text{упр}}$$

Уравнения (10) полностью совпадают с дифференциальными уравнениями движения этого манипулятора, полученными в [1] при использовании матриц перехода и методику составления уравнений Лагранжа второго рода.

Выводы. Во всем мире управлению и переработке отходов придают все более широкие экономические, экологические, политические и социальные контексты. Новым методам, технологиям и программам, которые помогают минимизировать эксплуатационные расходы по утилизации уделяют самое пристальное внимание [5]. И применение новых методик расчета для проектирования сложных механических систем, которыми являются перерабатывающие комплексы, могут заметно снизить трудоемкость и стоимость этих расходов.

Список литературы

1. *Аппель П.* Теоретическая механика. М. : ГИФМЛ, 1960. Т. 2. 487 с.

2. *Веретенников В. Г., Синицын В. А.* Теоретическая механика (дополнение к общим разделам). М. : Изд-во МАИ, 1996. 340 с.

3. *Касапов А. В., Заиченко Г. В.* Утилизация и автоматизация переработки бытовых отходов // Юный ученый. 2017. № 3.1 (12.1). С. 31–36.

4. *Лурье А. И.* Аналитическая динамика. М. : ГИФМЛ, 1961. 824 с.

5. *Марк Рогофф.* Планирование предприятий и программ по переработке твердых отходов. © William Andrew. 2013. ISBN: 9781455731923. 260 с.

6. *Маркеев А. П.* Теоретическая механика. М. : Наука. 1990. 416 с.

7. *Полак Л. С.* Вариационные принципы механики: Их развитие и применения в физике. М. : Либроком, 2010. 600 с.

8. *Рамчандра Т. В.* Обращение с твердыми бытовыми отходами. Институт энергетики и ресурсов, 2006. 336 с.

9. *Тюлина И. А.* История и методология механики. М. : Изд-во МГУ, 1979. 282 с.

10. *Четаев Н. Г.* Теоретическая механика. М. : Наука, 1987. 308 с.

11. *Шатров Е. А.* Применение обобщенного принципа Гаусса для управления движением тележки с маятниками : автореф. дис. … к. ф.-м. н. СПб., 2016. 23 с.

The Gauss principle in generalized coordinates in problems of rigid body dynamics on the example of a robot manipulator of the "Versatran" type

A. P. Levashov[1], O. Yu. Medvedev[2]
[1]PhD in Technical Sciences, associate professor, Vyatka State University.
Russia, Kirov. ORCID: 0000-0001-5899-8414. E-mail: usr06296@vyatsu.ru
[2]PhD in Technical Sciences, associate professor, Vyatka State University.
Russia, Kirov. ORCID: 0000-0001-9848-0839. E-mail: usr08307@vyatsu.ru

Abstract.The article considers the derivation of differential equations of motion of a mechanical system corresponding to Lagrange equations of the second kind using expressions of the kinetic energy of the system in generalized coordinates and generalized forces. The method is based on the principle of least Gauss forcing. The aim of this work is to obtain using this principle differential equations of dynamics in generalized coordinates for various types of movement on the example of a manipulator of the "Versatran" type, which can be used for sorting and recycling waste when creating robotic plants using manipulators.

Keywords: robot manipulators, waste disposal, variational principles, mathematical model, Gaussian compulsion, acceleration field, stationarity conditions, mechanical system, differential equations, solid state dynamics.

References

1. *Appel' P. Teoreticheskaya mekhanika* [Theoretical mechanics]. M. GIFML. 1960. Vol. 2. 487 p.
2. *Veretennikov V. G., Sinicyn V. A. Teoreticheskaya mekhanika (dopolnenie k obshchim razdelam)* [Theoretical mechanics (supplement to general sections)]. M. MAI. 1996. 340 p.
3. *Kasapov A. V., Zaichenko G. V. Utilizaciya i avtomatizaciya pererabotki bytovyh othodov* [Utilization and automation of household waste processing] // *Yunyj uchenyj* – Young scientist. 2017. No. 3.1 (12.1). Pp. 31–36.
4. *Lur'e A. I. Analiticheskaya dinamika* [Analytical dynamics]. M. GIFML. 1961. 824 p.
5. *Mark Rogoff. Planirovanie predpriyatij i programm po pererabotke tverdyh othodov* [Planning of enterprises and programs for the processing of solid waste]. © WilliamAndrew. 2013. ISBN: 9781455731923. 260 p.
6. *Markeev A. P. Teoreticheskaya mekhanika* [Theoretical mechanics]. M. Nauka. 1990. 416 p.
7. *Polak L. S. Variacionnye principy mekhaniki: Ih razvitie i primeneniya v fizike* [Variational principles of mechanics: Their development and applications in physics]. M. Librocom. 2010. 600 p.
8. *Ramchandra T. V. Obrashchenie s tverdymi bytovymi othodami* [Handling of solid household waste]. Institute of Energy and Resources. 2006. 336 p.
9. *Tyulina I. A. Istoriya i metodologiya mekhaniki* [History and methodology of Mechanics]. M. Moscow State University. 1979. 282 p.
10. *Chetaev N. G. Teoreticheskaya mekhanika* [Theoretical Mechanics]. M. Nauka. 1987. 308 p.
11. *Shatrov E. A. Primenenie obobshchennogo principa Gaussa dlya upravleniya dvizheniem telezhki s mayatnikami : avtoref. dis.… k.f.-m.n.* [Application of the generalized Gauss principle for controlling the movement of a cart with pendulums : abstr. dis... PhD in Physical and Mathematical Sciences]. SPb. 2016. 23 p.