УДК 511 DOI 10.25730/VSU.0536.20.037

Реализация внутрипредметных связей математического анализа при изучении числовых рядов

Л. В. Панкратова
кандидат педагогических наук, доцент кафедры фундаментальной математики,
Вятский государственный университет.
Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-1242-3807. E-mail: pankratovalarisa19@rambler.ru

Аннотация. Известно, что многообразие внутрипредметных связей позволяет оптимизировать учебный процесс, актуализировать систему фундаментальных понятий изучаемого курса и определить последовательность действий преподавателя при их формировании. Выявление методологической функции внутрипредметных связей дает возможность выбора для них средств реализации, исходя из особенностей содержания дисциплины. Настоящая статья посвящена обоснованию необходимости углубления внутрипредметных связей математического анализа. Представленные в статье материалы отражают результаты работы автора по повышению эффективности обучения данной дисциплине студентов Вятского государственного университета. Демонстрация процесса выстраивания внутрипредметных связей реализована на примере темы «Числовые ряды». Произведен выбор задач, обеспечивающих преемственность разделов математического анализа и способствующих развитию внутрипредметных связей курса, указаны направления их дальнейшего расширения.

Ключевые слова: внутрипредметные связи, математический анализ, числовой ряд.

Под внутрипредметными связями математики традиционно понимают связи между понятиями, определениями и теоремами ее различных разделов. В таком контексте внутрипредметные связи обеспечивают преемственность и взаимообусловленность фактов, разделенных при изучении временем.

Математический анализ – одна из фундаментальных дисциплин в структуре подготовки студентов-математиков. На большинстве соответствующих направлений бакалавриата изучение математического анализа осуществляется в течение нескольких семестров, поэтому реализация внутрипредметных связей данного курса представляет для преподавателя сложную задачу. Только грамотный подход к ее решению будет способствовать систематизации знаний студентов, установлению логической обусловленности предметного содержания дисциплины, пониманию ее единства и целостности.

На лекциях по математическому анализу формирование внутрипредметных связей происходит непроизвольно, поскольку преподавателю неизбежно приходится обращаться к ранее изученным студентами утверждениям при разъяснении новых понятий и доказательстве теорем. Однако данная деятельность является недостаточной в силу насыщенности лекционных занятий. В то же время проведение практических и семинарских занятий, а также организация индивидуальной внеаудиторной работы студентов позволяют активно расширять взаимосвязи между основными разделами анализа, углублять возможности применения его аппарата, развивая тем самым умения самостоятельной познавательной деятельности обучающихся. Указанные формы работы со студентами позволяют подходить к их обучению дифференцированно, учитывая уровень теоретических предметных знаний, навыков решения задач, мотивацию к изучению дисциплины, а также психологические особенности. Следовательно, подбор заданий для практических и семинарских занятий, а также для самостоятельной работы студентов является важным условием целенаправленного и осмысленного формирования внутрипредметных связей математического анализа.

Ввиду очевидной невозможности охвата всего рассматриваемого курса мы представим лишь несколько задач по теме «Числовые ряды» и установим те факты анализа, с которыми будет сопряжено их решение. Наш выбор обусловлен тем, что понятие ряда как одно из центральных понятий анализа широко используется как инструмент исследования различными науками: физикой, астрономией, экономикой, статистикой. Следовательно, глубокое изучение рядов определяет профессиональную компетентность выпускника.

Задача 1 [1, с. 313, № 11]. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами расходится. Доказать, что расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$.

Решение [1, с. 339]. Из соотношения

$$\frac{a_m}{S_m}+\frac{a_{m+1}}{S_{m+1}}+\ldots+\frac{a_q}{S_q}\geq\frac{S_q-S_{m-1}}{S_q}\ ,\ m\in\mathbf{N},\ q\in\mathbf{N},\ q>m$$

и расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ следует, что при фиксированном m $\lim_{q\to+\infty}\left(\frac{a_m}{S_m}+\ldots+\frac{a_q}{S_q}\right)\geq 1$, откуда в силу критерия Коши вытекает расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$.

Замечание 1. Критерий Коши сходимости числового ряда довольно редко используется при решении задач и упражнений. Например, в [2] имеются подобные задачи (см. №№ 2573–2577), однако обращение в них к критерию Коши скорее «навязано» формулировкой, чем является необходимым. Гораздо проще решить предлагаемые задачи с помощью, например, признаков сходимости и несложных оценок. В то же время в задаче 1 использование этой техники не даст нужного эффекта. Таким образом, рассмотренная задача не только демонстрирует применение одного из фундаментальных фактов анализа, но и нацеливает студентов на повторение понятия фундаментальной последовательности и ее свойств и, очевидно, углубляет внутрипредметные связи курса.

Приведем еще один пример задачи, решение которой требует обращения к критерию Коши.

Задача 2 [1, с. 314, № 18 б]. Пусть $\{u_n\}$ – монотонно возрастающая последовательность положительных чисел. Доказать, что ряды

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)\ \text{и}\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}-1\right)$$

сходятся, если эта последовательность ограничена, и расходятся, если она не ограничена.

Решение [1, с. 340]. Доказательство проведем для первого из данных рядов, для второго ряда схема рассуждений будет аналогичной.

Из условия задачи следует, что для любых натуральных чисел *m* и *p* справедливо соотношение

$$\frac{u_{m+p+1}-u_m}{u_{m+p+1}}\leq\sum_{n=m}^{m+p}\left(1-\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)=\sum_{n=m}^{m+p}\left(\frac{u_{n+1}-u_n}{u_{n+1}}\right)\leq\frac{u_{m+p+1}-u_m}{u_{m+1}}\leq\frac{u_{m+p+1}-u_m}{u_1}. \quad (1)$$

Если последовательность $\{u_n\}$ не ограничена, то при фиксированном m $\lim_{p\to\infty}\frac{u_{m+p+1}-u_m}{u_{m+p+1}}=1$, откуда в силу соотношения (1) и критерия Коши следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.

Если же последовательность $\{u_n\}$ ограничена, то она сходится, следовательно, в силу критерия Коши для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $N(\varepsilon)\in\mathbf{N}$, что $0<u_{m+p+1}-u_m<\varepsilon u_1$ для всех натуральных *p* и $m>N(\varepsilon)$. В силу соотношения (1) для этих *p* и *m* имеем: $0\leq\sum_{n=m}^{m+p}\left(1-\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)<\varepsilon$ и в силу критерия Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ сходится.

Замечание 2. Помимо критерия Коши при решении задачи 2 студентам потребуется применить теорему о предельном переходе в простом неравенстве и теорему о пределе монотонной ограниченной последовательности. Поскольку обе названные теоремы изучаются в разделе «Введение в анализ», рассмотренная задача будет полезна для углубления внутрипредметных связей математического анализа.

Задача 3 [2, с. 228, № 2589 г]. Пользуясь признаками сравнения, Даламбера или Коши, исследовать сходимость ряда

$$\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\ldots+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\ldots.$$

Решение. Представим два способа решения данной задачи. Демонстрируя первый подход, заметим следующее рекуррентное соотношение для членов данного ряда:

$$a_1=\sqrt{2},$$

$$a_2=\sqrt{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{a_1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$

$$a_3=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{a_2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},\ldots$$

Для исследования сходимости ряда теперь удобно применить признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}}}}=\frac{1}{2}.$$

Значение предела меньше единицы, значит, исследуемый ряд сходится.

Замечание 3. Значение $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}}}$ найти несложно. Последовательность $a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}}}$ (в записи *n* двоек) строго возрастает и ограничена сверху, поскольку

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}}}<\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{4}}}}=2.$$

Опираясь на теорему о пределе монотонной ограниченной последовательности, заключаем, что $\{a_n\}$ сходится. Обозначая теперь $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ и учитывая, что $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$, находим: $A=2$.

При изложении другого подхода к решению задачи 3 воспользуемся указанием в [2, с. 228], отсылающим нас к соотношению $\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}$.

В таком случае

$$\sqrt{2-\sqrt{2}}=\sqrt{2\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{8}}=2\sin\frac{\pi}{8},$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{2-\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)}}=\sqrt{2-\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{8}}}=\sqrt{2\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right)}=2\sin\frac{\pi}{16}.$$

Рассуждая аналогично, получим, что *n*-й член данного ряда равен $2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$ (для первого члена ряда соотношение также верно, поскольку $\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}$). Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$ нетрудно исследовать на сходимость, сравнивая его, например, со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}$. Заметим, что в данном случае применимы как простой, так и предельный признаки сравнения, причем применение предельного признака повлечет обращение к первому замечательному пределу.

Кроме того, признаки Даламбера и Коши также могут быть использованы для доказательства сходимости исследуемого ряда, поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{2\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}}=\frac{1}{2}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)(-\ln 2)}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}}=\frac{1}{2}.$$

В последнем случае для вычисления предела мы обратились к правилу Лопиталя – Бернулли раскрытия неопределенностей.

Замечание 4. Известно (см., например, [4, с. 300]), что во всех случаях, когда признак Даламбера дает ответ на вопрос о поведении ряда, ответ может быть получен и с помощью признака Коши, причем пределы обеих исследуемых вариант равны. Обратное утверждение неверно, в чем можно убедиться на примерах (см. [2, с. 229, № 2593] или [4, с. 303]).

Сформулируем этот факт в виде очередной задачи.

Задача 4. Докажите, что для последовательности $\{a_n\}$ положительных чисел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$, если второй из этих пределов существует.

Решение. Будем использовать следующее вспомогательное утверждение: если положительная варианта a_n имеет предел (конечный или нет), то тот же предел имеет и варианта $b_n=\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$. Его можно доказать, используя определение предела последовательности. В [3, с. 183] же оно установлено с помощью теоремы Шварца.

Применяя данное утверждение к последовательности

$$a_1, \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \ldots, \frac{a_n}{a_{n-1}}, \frac{a_{n+1}}{a_n}, \ldots,$$

получим: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ в предположении, что существует второй из упомянутых пределов.

Рассмотренная задача показывает, что признак Коши сильнее признака Даламбера. Однако использование последнего на практике обычно оказывается проще.

Мы представили несколько задач, которые сопряжены с обращением к содержанию разделов анализа, предваряющих изучение числовых рядов. В решении задач 1–4 нами использовались свойства непрерывных функций и фундаментальных последовательностей, теорема о пределе монотонной ограниченной последовательности, теорема о предельном переходе в простом неравенстве, широко и нетривиально применялся аппарат вычисления пределов. Данная тематика может быть значительно расширена. Различные сборники задач по математическому анализу позволяют насытить работу студента во время занятий и его самостоятельную деятельность разнообразными и интересными упражнениями, способствующими углублению внутрипредметных связей курса.

В заключение отметим: роль внутрипредметных связей в учебном процессе нельзя недооценивать, так как они непосредственно влияют на достижение целей обучения. Формирование внутрипредметных связей ликвидирует у студентов формализм знаний и умений, помогает им в осмыслении динамики развития главных линий учебного курса. Следовательно, повышается качество усвоения содержания дисциплины и происходит сокращение затрат учебного времени на ее изучение.

Список литературы

1. *Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А.* Задачи и упражнения по математическому анализу : пособие для университетов, пед. Вузов : в 2 ч. / под ред. В. А. Садовничего. 3-е изд., испр. М. : Дрофа, 2001. Ч. 2: Ряды, несобственные интегралы, ряды Фурье, преобразование Фурье. 712 с.

2. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учеб. пособие / Б. П. Демидович. М. : Астрель : АСТ, 2002. 558[2] с.

3. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. Т. 1. 8-е изд. М. : ФИЗМАТЛИТ, Лаборатория знаний, 2003. 680 с.

4. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. Т. 2. 8-е изд. М. : ФИЗМАТЛИТ, Лаборатория знаний, 2003. 864 с.

Implementation of intra-subject relations of mathematical analysis in the study of numerical series

L. V. Pankratova

PhD in Pedagogical Sciences, associate professor of the Department of fundamental mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-1242-3807. E-mail: pankratovalarisa19@rambler.ru

Abstract. It is known that the variety of intra-subject connections allows you to optimize the educational process, update the system of fundamental concepts of the course being studied and determine the sequence of actions of the teacher in their formation. The identification of the methodological function of intra-subject relations makes it possible to choose the means of implementation for them, based on the specifics of the content of the discipline. This article is devoted to the substantiation of the need to deepen the intra-subject relations of mathematical analysis. The materials presented in the article reflect the results of the author's work to improve the effectiveness of teaching this discipline to students of Vyatka State University. The demonstration of the process of building intra-subject relationships is implemented on the example of the topic "Numerical series". The choice of tasks that ensure the continuity of the sections of mathematical analysis and contribute to the development of intra-subject relations of the course is made, the directions of their further expansion are indicated.

Keywords: intra-subject relations, mathematical analysis, numerical series.

References

1. *Vinogradova I. A., Olehnik S. N., Sadovnichij V. A. Zadachi i uprazhneniya po matematicheskomu analizu : posobie dlya universitetov, ped. vuzov : v 2 ch.* [Problems and exercises in mathematical analysis : manual for universities, ped. Universities : at 2 pts.] / under the editorship of V. A. Sadovnichy. 3rd ed., corr. M. Drofa. 2001. Pt. 2: Series, improper integrals, Fourier series, Fourier transform. 712 p.

2. *Demidovich B. P. Sbornik zadach i uprazhnenij po matematicheskomu analizu : ucheb. posobie* [Collection of problems and exercises in mathematical analysis : textbook] / B. P. Demidovich. M. Astrel : AST. 2002. 558 [2] p.

3. *Fichtenholz G. M. Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischisleniya : v 3 t. T. 1. 8-e izd.* [Course of differential and integral calculus : in 3 vols. Vol. 1. 8th ed.] M. FIZMATLIT, Laboratoriya Znaniy. 2003. 680 p.

4. *Fichtenholz G. M. Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischisleniya : v 3 t. T. 2. 8-e izd.* [Course of differential and integral calculus : in 3 vols. Vol. 2. 8th ed.] M. FIZMATLIT, Laboratoriya Znaniy. 2003. 864 p.