УДК 517.911/.958 DOI 10.25730/VSU.0536.20.033

Применение метода осциллирующих функций к приближенному решению одного класса интегро-дифференциальных уравнений

Е. Ю. Рекка[1], Ю. Ю. Фролов[2]

[1]старший преподаватель, Пермский национальный исследовательский политехнический университет. Россия, г. Пермь. E-mail: elena.rekka@yandex.ru

[2]аспирант, Шанхайский транспортный университет. Китай, г. Шанхай. E-mail: yrsfrolov@sjtu.edu.cn

Аннотация. В работе дан подробный алгоритм построения приближенного решения одного класса интегро-дифференциальных уравнений, показана возможность реализации данного алгоритма, опирающегося на метод осциллирующих функций, который применяется для численного решения дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений для разных классов данных уравнений. Дается оценка погрешности, позволяющая получить погрешность на каждом частичном промежутке. В общем случае она носит апостериорный характер, но для случаев одного класса интегро-дифференциальных уравнений получены априорные оценки погрешности. Оценка погрешности, которая дает оценку разности точного и приближенного решений, позволяет получить погрешность на каждом промежутке. В работе приведен пример приближенного решения одного класса интегро-дифференциального уравнения в программном пакете Mathcad, по итогу которого получена оценка погрешности данного уравнения.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, метод осциллирующих функций, программный пакет Mathcad.

В работе F. Blomm показано, что изменение электрического смещения поля в простом классе неупругих диэлектриков смоделированных задачей [3]:

$$\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial t^2}+\psi(0)\frac{\partial D(x,t)}{\partial t}-$$
$$-\beta\psi(0)\left(\gamma\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial x^2}-D(x,t)\right)+ \tag{1}$$
$$+\beta\int_0^t \ddot{\psi}(t-\tau)D(x,\tau)\,d\tau=\beta\ddot{\psi}(t)D_0(x),$$

с условиями

$$D(x,0)=D_0(x),\ D_t'(x,0)=D_1(x), \tag{2}$$

где $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma=\dfrac{1}{\alpha\psi(0)}$ – заданные постоянные, $\psi(t)$ – функция, имеющая производные до 2-го порядка включительно, $\psi(0)\neq 0$, $\{0\le x\le l, 0\le t\le T\}$, $D_0(x)$, $D_1(x)$ – заданные непрерывные функции на $0\le x\le l$.

При введении подходящих гильбертовских пространств операторов, частным случаем задачи {(1), (2)} является следующая задача:

$$u''(t)-\alpha u'(t)++\int_0^t \mu(t-\tau)u(\tau)\,d\tau=r(t)u_0 \tag{3}$$

с начальными условиями

$$u(0)=u_0,\ u'(0)=u_1, \tag{4}$$

где $\alpha>0$ – const, $\mu(t-\tau), r(t)$ – непрерывно-дифференцируемая функция на $[0,\tau]$, u_0, u_1 – заданные числа.

Представим алгоритм построения приближенного решения выше поставленных задач.

1. Решение задачи {(1), (2)} строим методом осциллирующих функций [2].

Сегмент $\left[0,T\right]$ разобьем на маленькие части $0=t_0\le t_1\le t_2\le\ldots=t_{N-1}=T$ с шагом $h=\max\limits_k\left(t_{k+1}-t_k\right)$, $k=0,1,\ldots,N-1$.

Уравнение для $D_N\left(x,t\right)$ приведено ниже:

$$D_N\left(x,t\right)=\begin{cases}\frac{1}{2}a_k\left(x\right)\left(t-t_k\right)^2+b_k\left(x\right)\left(t-t_k\right)+c_k\left(x\right),\\ t_k\le t\le t_{k+1},0\le x\le l,\ k=0,1,\ldots,N-1.\\ 0,t\notin\left[t_k,t_{k+1}\right],0\le x\le l.\end{cases} \tag{5}$$

Коэффициенты $c_0\left(x\right)$, $b_0\left(x\right)$ находим из начальных условий (2): $b_0\left(x\right)=D_1\left(x\right)$; $c_0=D_0\left(x\right)$.

Формулы для коэффициентов $c_k\left(x\right)$ и $b_k\left(x\right)$ получаем из условия равенства $D_N(x,t)$ и $\frac{\partial D_N\left(x,t\right)}{\partial t}$ на прямых $t=t_k$ по формулам (6) и (7)

$$b_k\left(x\right)=a_{k-1}\left(x\right)h+b_{k-1}\left(x\right) \tag{6}$$

$$c_k\left(x\right)=\frac{a_{k-1}\left(x\right)}{2}h^2+b_{k-1}\left(x\right)h+c_{k-1}\left(x\right),\quad k=1,2,..,N-1,\ h=t_{k+1}-t_k. \tag{7}$$

Коэффициенты $a_k\left(x\right)$ находим из условия осциллируемости невязки

$$\begin{aligned}\eta_k\left(x,t\right)&=a_k\left(x\right)+\psi\left(0\right)\left[a_k\left(t-t_k\right)+b_k\right]-\\ &-\beta\dot{\psi}\left(0\right)\left[\gamma\frac{\partial^2 D_{N_k}\left(x,t\right)}{\partial x^2}-D_{N_k}\left(x,t\right)\right]+\\ &+\beta\sum_{m=0}^{k-1}\int\limits_{t_m}^{t_{m+1}}\ddot{\psi}\left(t-\tau\right)D_{N_m}\left(x,\tau\right)d\tau+\\ &+\beta\int\limits_{t_m}^{t}\ddot{\psi}\left(t-\tau\right)D_{N_m}\left(x,\tau\right)d\tau-\beta\psi\left(t\right)D_0\left(x\right),\end{aligned} \tag{8}$$

$$\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\eta_k\left(x,t\right)dt=0,\ k=0,1,2,\ldots,N-1,\ 0\le x\le l \text{ [2]},$$

для коэффициента $a_k\left(x\right)$ получаем формулы в виде уравнения

$$a_k''\left(x\right)-\beta_k a_k\left(x\right)=\gamma_{1k}b_k\left(x\right)+\gamma_{2k}b_k''\left(x\right)+\gamma_{3,k}c_k\left(x\right)+\gamma_{4,k}c_k''\left(x\right)+\gamma_{5,k}, \tag{9}$$

с условиями

$$a_k(0)=a_k'(0)=0, \tag{10}$$

$\beta_k>0$, $\gamma_{ik}\left(i=1,2,3,4,5\right)$ – заданные числа.

С помощью метода произвольных вариаций решаем уравнение (9) с начальными условиями (10)

$$\begin{aligned}a_k\left(x\right)=\frac{1}{2\sqrt{\beta_k}}\int\limits_0^x&\left(\gamma_{1k}b_k\left(x\right)+\gamma_2 b_k''\left(x\right)+\gamma_{3k}c_k\left(x\right)\right.\\ &\left.+\gamma_{4,k}c_k''\left(x\right)+\gamma_{5k}\right)\left(l^{\sqrt{\beta_k}(x-t)}-l^{\sqrt{\beta_k}(t-x)}\right)dt\end{aligned}, \tag{11}$$

$$\left(k = 1,2,3,\ldots,\mathrm{N}-1\right).$$

Подставляя коэффициенты $a_k\left(x\right)$, $b_k\left(x\right)$, $c_k\left(x\right)$ в $D_N\left(x,t\right)$, получаем приближенное решение задачи (9), которое удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 D_{N_k}\left(x,t\right)}{\partial t^2}+\psi\left(0\right)\frac{\partial D_{N_k}\left(x,t\right)}{\partial t}-\beta\dot{\psi}\left(0\right)\left[\gamma\frac{\partial^2 D_N}{\partial x^2}-D_N\left(x,t\right)\right]+\\+\beta\int_0^t\ddot{\psi}\left(t-\tau\right)D_N\left(x,\tau\right)d\tau-\beta\dot{\psi}\left(t\right)D_0\left(x\right)=\eta_N\left(x,t\right)\end{gathered}\tag{12}$$

с условиями $D_N\left(x,0\right)=D_0\left(x\right)$, $D'_{N,t}\left(x,0\right)=D'_0\left(x\right)$.

Легко видеть, что погрешность $v\left(x,t\right)=D\left(x,t\right)-D_N\left(x,t\right)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\psi\left(0\right)\frac{\partial v}{\partial t}-\beta\dot{\psi}\left(0\right)\left[\gamma\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-v\left(x,t\right)\right]+\\+\beta\int_0^t\ddot{\psi}\left(t-\tau\right)v\left(x,\tau\right)d\tau-\eta_N\left(x,t\right)=0,\end{gathered}\tag{13}$$

с условиями

$$v\left(x,0\right)=0,\ v'_t\left(x,0\right)=0.\tag{14}$$

Решение задачи {(13), (14)} будем находить в виде $v\left(x,t\right)=p\left(t\right)Q\left(x\right)$, где $p\left(t\right)$ и $Q\left(x\right)$ после преобразований находятся из задач:

$$\begin{gathered}Q''\left(x\right)-\alpha Q\left(x\right)=0,\\Q\left(0\right)=1,\ Q'\left(0\right)=\frac{1}{\sqrt{2}};\end{gathered}\tag{15}$$

$$\begin{gathered}\frac{d^2P\left(t\right)}{dt^2}+\psi\left(0\right)\frac{dp}{dt}+\beta\int_0^t\ddot{\psi}\left(x-\tau\right)P\left(\tau\right)d\tau+\frac{\eta_N\left(x,t\right)}{Q\left(k\right)}=0,\\P\left(0\right)=0,\ P'\left(0\right)=0.\end{gathered}\tag{16}$$

Решение второй задачи.

Интегрируем уравнение от 0 до t дважды и используем лемму Белмана [3] относительно функции $p\left(t\right)$, получим

$$\left|p\left(t\right)\right|\le\frac{1}{\left|Q\left(x\right)\right|}\max_{\substack{0\le t\le T\\0\le x\le l}}\left|\psi'_N\left(x,t\right)\right|\exp\int_0^T\left|\psi\left(0\right)+\beta T^2\ddot{\psi}\left(t-\tau\right)\right|d\tau\tag{17}$$

где $\max\limits_{\substack{0\le t\le T\\0\le x\le l}}\left|\psi'_N\left(x,t\right)\right|\le M$ оцениваются аналогично, как в работе [1].

После построения приближенного решения находим $v\left(x,t\right)=D\left(x,t\right)-D_N\left(x,t\right)$.

Для $v\left(x,t\right)$ имеем оценку $\left|x\left(x,t\right)\right|\le Me^{M_1}h^2$, где

$$M_1=\int_0^T\left|\psi\left(0\right)+\beta T^2\ddot{\psi}\left(t-\tau\right)\right|d\tau.\tag{18}$$

Остается на рассмотрение задача 2.

2. Решение задачи {(3), (4)} находим следующим образом.

Разбиваем сегменты $[0,T]$ на частичные $0=t_0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots = t_{N-1} = T$. Решение $u_K(t)$ строим так:

$$u_k(t) = \begin{cases} \frac{a_k}{2}(t-t_k)^2 + b_k(t-t_k) + c_k, & t \in [t_{k,} t_{k+1}]\ (k = 0,1,2,\ldots,N-1), \\ 0, & t \notin [t_k, t_{k+1}], \end{cases} \tag{19}$$

где a_k, b_k, c_k – неизвестные постоянные.

Коэффициенты b_0 и c_0 находим из начальных условий (4) $b_0 = u_0'$, $c_0 = u_0$.

Как показано в работе Н. В. Ворониной, В. В. Маланина, Р. А. Рекка, коэффициенты c_k, b_k определяем из условия непрерывности функции $u_N(t)$ и $u_N'(t)$ в точках стыка парабол по формулам

$$c_k = \frac{a_{k-1}}{2}h^2 + b_{k-1}h + c_{k-1},\ b_k = a_{k-1}h + b_{k-1}, \\ h = t_{k+1} - t_k,\ k = 0,1,2,\ldots, N-1 \text{ »[2].} \tag{20}$$

Постоянные a_k определяем из условия осциллируемой функции $\psi_N(t)$:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \psi_N(t)\,dt = 0,\ k = 0,1,2,\ldots,N-1, \tag{21}$$

где

$$\psi_N(t) = a_k - \alpha\left(a_k(t-t_k) + b_k\right) + \sum_{i=0}^{k-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mu(t-\tau)\left[c_i + b_i(\tau - t_i) + \frac{c_i}{2}(\tau - t_k)^2\right]d\tau + \\ + \int_{t_k}^{t} \mu(t-\tau)\left[c_k + b_k(\tau - t_k) + \frac{a_k}{2}(\tau - t_k)^2\right]d\tau - \beta u_0 \ . \tag{22}$$

Применяя теорему о среднем интегрального исчисления, получаем уравнение для a_k,

$$a_k = \frac{\alpha b_k - \mu(\zeta_k - \eta_k)\left[b_k(\eta_k - t_k) + c_k\right] - B + r(t)u_0}{1 - \alpha(\zeta_k - \eta_k) + \frac{1}{2}\mu(\zeta_k - \eta_k)(\zeta_k - l_k)^2}, \tag{23}$$

где $t_k < \zeta_k < \eta_k < t_{k+1}$, $k = 0,1,2,\ldots,N-1$,

$$B = \sum_{i=0}^{k-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mu(t-\tau)\left[\frac{a_i}{2}(\tau - t_i)^2 + b_i(\tau - t_i) + c_i\right]d\tau. \tag{24}$$

a_k определяется при условии,

$$1 - \alpha(\zeta_k - t_k) + \frac{1}{2}\mu(\zeta_k - \eta_k)(\zeta_k - \eta_k)(\zeta_k - t_k)^2 \ne 0, \tag{25}$$

что всегда можно сделать, выбрав соответствующим образом разбивку промежутка $[0,T]$.

Вычислив a_k, b_k, c_k с применением вычислительного пакета Mathcad, получим приближенное решение $u_N(t)$, удовлетворяющее уравнению

$$u_N''(t)-\alpha u_N'(t)+\int_0^t \mu(t-\tau)u(\tau)d\tau - r(t)u_0=\eta_N(t)$$

$$u_N(0)=u_0,\ u_N'(0)=u_0'. \tag{26}$$

Погрешность $v(t)=u(t)-u_N(t)$ удовлетворяет уравнению

$$v''(t)-\alpha v(t)+\int_0^t \mu(t-\tau)v(\tau)d\tau-\eta_N(t)=0 \tag{27}$$

с условиями $v(0)=v'(0)=0$.

Интегрируя (27) дважды от 0 до t и применяя Лемму Белмана [1], получим

$$|v(t)|\le T\exp N_1 \max_{0\le t\le T}|\psi'_N(t)|h^2, \tag{28}$$

где $N_1=\int_0^T\left|\alpha+(t-\tau)^2\mu(t-\tau)\right|d\tau$.

$\max\limits_{0\le t\le T}|\eta'_N(t)|$ оценивается из уравнения (26), как это делается в работе [3], вначале получаем оценки для $|u_N|$ и $|u''_N|$ через параметры уравнения.

Окончательно для погрешности $v(t)$ имеем оценку $|v(t)|\le Lh^2$, где L выражается через параметры уравнения.

Полученные оценки носят априорный характер и всегда можно заранее выбрать *h* (разбивку) так, чтобы получилось заданная точность приближенного решения.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$u''(t)-u'(t)+\int_0^t (t-\tau)u(\tau)d\tau=t \tag{29}$$

С условиями $u(0)=1$, $u'(0)=0$ с разбивкой *h=0.1* на промежутке [0, 1].

Используя предложенную методику построения приближенного решения, получим погрешность $|v(t)|\le 2\cdot 10^{-1}$.

Список литературы

1. *Белман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М. : Изд-во иност. лит-ры.

2. *Воронина Н. В., Маланин В. В., Рекка Р. А.* Осциллирующие функции и некоторые их применения. Свердловск : Изд-во Уральского ун-та, 1990. 111 с.

3. *Blomm F., Stam J.* Math. Anal, 1980. Vol. 11. № 2. March.

Application of the method of oscillating functions to the approximate solution of a class of integro-differential equations

E. Yu. Rekka[1], Yu. Yu. Frolov[2]

[1]senior lecturer, Perm National Research Polytechnic University.
Russia, Perm. E-mail: elena.rekka@yandex.ru
2postgraduate student, Shanghai Jiao Tong University.
China, Shanghai. E-mail: yrsfrolov@sjtu.edu.cn

Abstract. The paper presents a detailed algorithm for constructing an approximate solution of one class of integro-differential equations, and shows the possibility of implementing this algorithm based on the method of oscillating functions, which is used for the numerical solution of differential, integral, and integro-differential equations for different classes of these equations. An error estimate is given to obtain the error at each partial interval. In the general case, it is a posteriori, but for the cases of one class of integro-differential equations, a priori error estimates are obtained. The error estimate, which gives an estimate of the difference between the exact and approximate solutions, allows you to get the error at each interval. The paper presents an example of an approximate solution of a class of integro-differential equation in the Mathcad software package, which results in an error estimate for this equation.

Keywords: integro-differential equations, method of oscillating functions, Mathcad software package.

References

1. *Belman R. Teoriya ustojchivosti reshenij differencial'nyh uravnenij* [The theory of stability of solutions of differential equations]. M. Foreign literature.
2. *Voronina N. V., Malanin V. V., Rekka R. A. Oscilliruyushchie funkcii i nekotorye ih primeneniya* [Oscillating functions and some of their applications]. Sverdlovsk. Ural University. 1990. 111 p.
3. *Blomm F., Stam J.* Math. Anal, 1980. Vol. 11. No. 2. March.