№4 (23) 2021 ISSN: 2782-2672

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК

Вятского государственного университета

MATHEMATICAL BULLETIN

of Vyatka State University

Вятский государственный университет

Математический вестник Вятского государственного университета

Научный журнал

№ 4 (23)

Киров
2021

УДК 51(051)
М34

Научный журнал «Математический вестник Вятского государственного университета»
как средство массовой информации зарегистрирован в Роскомнадзоре
(Свидетельство о регистрации СМИ Эл № ФС77-80462 от 01 марта 2021 г.)
Учредитель журнала – ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет»
Адрес издателя: 610000, г. Киров, ул. Московская, 36,
тел. (8332) 208-964 (Научное издательство ВятГУ)
Адрес редакции: 610000, г. Киров, ул. Московская, 36,
тел. (8332) 208-964 (Научное издательство ВятГУ)
Редактор **А. В. Мариева**
Компьютерная верстка **Л. А. Кислицына**
Редактор выпускающий **А. Ю. Егоров**
Ответственный за выпуск **И. В. Смольняк**
Цена свободная

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 512.55 DOI 10.25730/VSU.0536.21.021

Изучение основ теории полуколец. Простые идеалы

Е. М. Вечтомов

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-3490-2956. E-mail: vecht@mail.ru

Аннотация. Работа носит математико-методический характер. Анализируются вопросы содержания и методики первоначального изучения абстрактной теории полуколец. Дано оригинальное изложение введения в теорию полуколец. Обучение студентов современной теории полуколец целесообразно начинать с изучения коммутативных полуколец. Рассматривается тема простых идеалов в структурной теории коммутативных полуколец с нулем и единицей. Разобраны соответствующие примеры. Предложена система учебных упражнений и учебно-исследовательских задач о полукольцах.

Ключевые слова: полукольцо, коммутативное полукольцо, простой идеал, обучение теории полуколец, упражнение, учебная исследовательская задача.

Введение

Изучение теории полуколец следует, на наш взгляд, начинать с элементов теории коммутативных полуколец, по аналогии с изучением коммутативных колец в теории колец и модулей [1; 17, глава 2]. В качестве содержательного введения в теорию полуколец хорошо подходит тема простых идеалов в коммутативных полукольцах, которая достаточно дидактична и поучительна. Этот материал предназначается участникам студенческого учебно-исследовательского семинара (кружка) по алгебре [9].

В завершающей части статьи приводится система упражнений и учебных исследовательских задач для самостоятельного решения и размышлений. Такие системы заданий весьма полезны при изучении абстрактной алгебры [5]. Методике изучения алгебраических объектов посвящена работа [14].

Укажем издания, на которые можно опереться при изучении теории полуколец: по теории полуколец – это [4; 10, глава 1; 11, глава 1; 12; 22], по общей алгебре – [8, глава 2; 13; 16, глава V; 19; 20], по теории решеток – [2; 5; 8, глава 3; 15; 18], по общей топологии – [8, глава 4; 21].

Предварительные сведения

Алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot \rangle$ называется *полукольцом*, если $\langle S, + \rangle$ – коммутативная полугруппа, $\langle S, \cdot \rangle$ – полугруппа, операция умножения $\cdot$ дистрибутивна относительно операции сложения + с обеих сторон: $a(b+c)=ab+ac$, $(a+b)c=ac+bc$ для любых $a, b, c \in S$.

Мы не будем давать полукольцевые определения общеалгебраических и кольцевых понятий, таких, как подполукольцо, идеал, гомоморфизм, конгруэнция, фактор-полукольцо, прямое произведение, упорядоченное множество, решетка, нулевой элемент 0, единичный элемент 1.

Полукольцо с коммутативным умножением называется *коммутативным*. Полукольцо называется *аддитивно идемпотентным* (*мультипликативно идемпотентным*), если оно удовлетворяет тождеству $x+x=x$ ($xx=x$). Коммутативное полукольцо будет *дистрибутивной решеткой*, если оно мультипликативно идемпотентно и удовлетворяет тождеству *поглощения* $x+xy=x$. Дистрибутивная решетка S с нулем 0 и единицей $1\neq 0$ называется *булевой решеткой*, если каждый элемент $a\in S$ имеет *дополнение* $b\in S$: $a+b=1$, $ab=0$. Полукольцо S называется *кольцом*, если его аддитивная полугруппа $\langle S, + \rangle$ является коммутативной группой с нейтральным элементом нуль 0. Мультипликативно идемпотентное кольцо называется *булевым*.

В статье рассматриваются ***коммутативные полукольца S с нулем* 0 *и ненулевой единицей* 1** (если не оговорено иное).

Для идеалов A и B полукольца S через AB обозначается идеал в S, состоящий из всевозможных (конечных) сумм произведений ab, где $a\in A$, $b\in B$. Ясно, что $AB\subseteq A\cap B$.

Для семейства $(A_i)_{i\in I}$ идеалов A_i полукольца S под суммой семейства $(A_i)_{i\in I}$ понимается идеал

$$\sum_{i\in I} A_i=\cup(\sum_{i\in F} A_i) \text{ по конечным множествам } F\subseteq I$$

полукольца S, состоящий из сумм вида $a_k+a_l+\ldots+a_m$, $a_k\in A_k$, $a_l\in A_l,\ldots$, $a_m\in A_m$ при $F=\{k, l,\ldots, m\}$ – конечном подмножестве индексного множества $I\neq\varnothing$.

Множество IdS всех идеалов полукольца S с бинарным отношением включения $\subseteq$ является *полной решеткой*, т. е. любое непустое множество $\{A_i$: $i\in I\}$ идеалов A_i полукольца S имеет точную верхнюю грань $\sum_{i\in I} A_i$ и точную нижнюю грань $\cap_{i\in I} A_i$. Наименьший элемент решетки IdS есть *нулевой* идеал $\{0\}$, а наибольший элемент – само полукольцо S.

Множество Con$S$ всех конгруэнций на полукольце S относительно включения $\subseteq$ также будет полной решеткой. Точной нижней гранью непустого множества $\{\rho_i$: $i\in I\}$ конгруэнций на S в решетке Con$S$ является пересечение $\cap_{i\in I}\rho_i$ данных конгруэнций. Наименьшим элементом решетки Con$S$ служит отношение равенства на S, а наибольшим элементом – одноклассовая конгруэнция на S.

Полукольцо S называется:

– *полукольцом с делением*, если любой ненулевой элемент в S обратим;

– *полуполем*, если S – полукольцо с делением, не являющееся кольцом;

– *антикольцом*, если $s+t=0 \Rightarrow s=0$ для любых s, $t\in S$.

Идеал A полукольца S называется *собственным*, если $A\neq S$; это равносильно тому, что $1\notin A$.

Собственный идеал J полукольца S называется:

– *простым*, если $\forall a, b\in S$ $(ab\in J \Rightarrow (a\in J \vee b\in J))$;

– *максимальным*, если $J\subset I$ влечет $I=S$ для любого идеала I в S;

– *строгим*, если $\forall a, b\in S$ $(a+b\in J \Rightarrow a\in J)$;

– *полустрогим*, если $\forall a, b\in S$ $(a, a+b\in J \Rightarrow b\in J)$.

Строгие идеалы в полукольцах являются полустрогими, но, вообще говоря, не наоборот. В кольце все идеалы полустрогие, а строгим будет только само кольцо. В дистрибутивных решетках все идеалы строгие.

Важную роль в общей теории полуколец играет конгруэнции Берна по идеалам полуколец.

Конгруэнцией Берна на полукольце S с нулем по его идеалу J называется бинарное отношение $\rho(J)$ на S, определяемой формулой: для любых s, $t\in S$

$$s\rho(J)t \Leftrightarrow \exists a, b\in J\ (s+a=t+b).$$

Легко видеть, что $\rho(J)$ есть конгруэнция на полукольце S, причем $J\subseteq[0]_{\rho(J)}$. Идеал J образует класс нуля некоторой конгруэнции (равносильно, конгруэнции $\rho(J)$) на S тогда и только тогда, когда J будет полустрогим идеалом. Конгруэнция Берна $\rho(J)$ будет наименьшей среди конгруэнций σ на полукольце S, для которых $[0]_\sigma=[0]_{\rho(J)}$.

Отметим, что конгруэнции на любом кольце S суть в точности конгруэнции Берна по различным идеалам J в S, т. е. отношения сравнимости по J: $s\rho(J)t \Leftrightarrow s-t\in J$.

Для произвольного полукольца S с нулем 0 положим

$$r(S)=\{s\in S\text{: } \exists t\in S\ (s+t=0\} \text{ –}$$

это множество всех элементов из S, имеющих противоположный элемент.

Ясно, что $r(S)$ – строгий идеал полукольца S, являющийся кольцом. Равенство $r(S)=S$ означает, что S – кольцо. В случае равенства $r(S)=\{0\}$ получаем антикольцо S.

Имеет место следующая структурная

Теорема 0 [3, с. 25]. *Для любого полукольца S с нулем* 0 *класс нуля конгруэнции Берна $\rho(r(S))$ по идеалу $r(S)$ совпадает с кольцом $r(S)$, а соответствующее фактор-полукольцо $S/\rho(r(S))$ является антикольцом.*

Лемма Цорна. *Если в произвольном упорядоченном множестве $\langle X, \leq\rangle$ любая цепь (линейно упорядоченное подмножество) ограничена сверху, то в X существует максимальный элемент m ($m\leq x \Rightarrow x=m$ для всякого $x\in X$).*

Заметим, что лемма Цорна эквивалентна аксиоме выбора в теории множеств. Она часто применяется в теоретико-множественных рассуждениях, в абстрактной алгебре, общей топологии, функциональном анализе.

Простые идеалы

Приведем ряд утверждений о структурных свойствах полуколец S, связанных с простыми идеалами полуколец.

Непустое подмножество M полукольца S называется *мультипликативно замкнутым*, если $ab\in M$ для любых a, $b\in M$, т. е. M – подполугруппа мультипликативной полугруппы $\langle S, \cdot\rangle$ полукольца S.

Предложение 1. *Если в полукольце S даны непересекающиеся мультипликативно замкнутое множество M и идеал J ($M\cap J=\varnothing$), то в S существует простой идеал P, такой, что $J\subseteq P$ и $M\cap P=\varnothing$.*

Доказательство. Образуем множество X всех тех идеалов A полукольца S, которые содержат J и не пересекаются с M. Множество X не пусто, так как содержит идеал J. Рассмотрим упорядоченное множество $\langle X, \subseteq\rangle$. Пусть $\{A_i: i\in I\}$ – цепь в $\langle X, \subseteq\rangle$: $A_i\in X$, $A_i\subseteq A_j$ или $A_j\subseteq A_i$ для любых индексов i, $j\in I$. Ее объединение $A=\cup A_i$ является идеалом в S (упражнение 4). Поскольку $J\subseteq A$ и $M\cap A=\varnothing$, то $A\in X$, причем $A=\sup\{A_i: i\in I\}$ в $\langle X, \subseteq\rangle$. Значит, упорядоченное множество $\langle X, \subseteq\rangle$ удовлетворяет условию леммы Цорна. Следовательно, по лемме Цорна X обладает максимальным элементом P: если $B\in X$ и $P\subseteq B$, то $B=P$; другими словами, если $P\subset B$ для идеала B полукольца S, то $M\cap B\neq\varnothing$.

Остается доказать, что идеал P – простой. Возьмем в S любые элементы a, $b\notin P$, и рассмотрим идеалы $P+aS$ и $P+bS$ (упражнение 1). Так как $a=0+a\cdot 1\in P+aS$ и $b\in P+bS$, то, в силу максимальности идеала P в X, $(P+aS)\cap M\neq\varnothing$ и $(P+bS)\cap M\neq\varnothing$. Стало быть, $p+as\in M$ и $q+bt\in M$ для некоторых элементов p, $q\in P$ и s, $t\in S$. Найдем произведение полученных элементов:

$$c=(p+as)(q+bt)=pq+pbt+asq+asbt.$$

Элемент c принадлежит мультипликативно замкнутому множеству M. Первые три слагаемые правой части равенства принадлежат идеалу P. Поэтому четвертое слагаемое $asbt=(ab)st\notin P$, откуда $ab\notin P$. Тем самым, установлена простота идеала P.

Обозначим через Spec$S$ множество всех простых идеалов полукольца S и через rad$S$ множество всех нильпотентных элементов полукольца S.

Теорема 1. *Полукольцо S обладает следующими свойствами:*

1) *полукольцо S имеет хотя бы один простой идеал, т. е. множество Spec$S$ непусто;*
2) *максимальные идеалы полукольца S являются простыми;*
3) *каждый собственный идеал полукольца S содержится в некотором его максимальном идеале;*
4) *множество rad$S$ совпадает с пересечением всевозможных простых идеалов в S;*
5) *множество rad$S$ является идеалом полукольца S.*

Доказательство. 1. Достаточно применить предложение 1 к $J=\{0\}$ и $M=\{1\}$.

2. Пусть N – максимальный идеал полукольца S. Положим $M=\{1\}$. Поскольку $1\notin N$, то $M\cap N=\varnothing$. По предложению 1 в S существует простой идеал P, содержащий N. Откуда $N=P$ – простой идеал.

3. Пусть J – собственный идеал полукольца S. При $M=\{1\}$ имеем $M\cap J=\varnothing$. Тогда идеал P из доказательства предложения 1 и будет искомым максимальным идеалом в S, содержащим данный идеал J.

4. Пусть $a\in\mathrm{rad}S$, т. е. $a^n=0$ для подходящего натурального числа n. Возьмем произвольный простой идеал P полукольца S. Поскольку $a^n=0\in P$, то $a\in P$ или $a^{n-1}\in P$; если $a^{n-1}\in P$, то $a\in P$ или $a^{n-2}\in P$; и т. д. В любом случае на $(n-1)$-м шаге получим $a\in P$. Значит, $\mathrm{rad}S\subseteq\cap\{P: P$ – простой идеал в $S\}=\cap\mathrm{Spec}S$.

Обратно, пусть $a\in S\setminus\mathrm{rad}S$, т. е. элемент a не нильпотентен. Тогда мультипликативно замкнутое множество $M=\{a, a^2,\dots, a^n,\dots\}$ всех натуральных степеней элемента a не содержит 0, стало быть, не пересекается с нулевым идеалом. По предложению 1 существует простой идеал P в S, не содержащий a. По закону контрапозиции $\cap\mathrm{Spec}S\subseteq\mathrm{rad}S$. Тем самым, установлено равенство $\mathrm{rad}S=\cap\mathrm{Spec}S$.

5. Вытекает из свойств 1 и 4 в силу упражнения 2.

Для произвольного элемента a полукольца S положим

$$D(a)=\{P\in\mathrm{Spec}S: a\notin P\} \text{ и}$$

$$\alpha: S\to\{D(a): a\in S\}\subseteq\mathrm{B}(\mathrm{Spec}S),\ \alpha(a)=D(a) \text{ для всех } a\in S.$$

Легко видеть, что для любых элементов a, $b\in S$:

1) $D(0)=\varnothing$, $D(1)=\mathrm{Spec}S$;
2) $D(ab)=D(a)\cap D(b)$;
3) $D(a+b)\subseteq D(a)\cup D(b)$.

Замечание 1. Если отображение α является изоморфным вложением полукольца S в булеан $\langle\mathrm{B}(\mathrm{Spec}S), \cup, \cap\rangle$, т. е. α осуществляет изоморфизм S на решетку множеств $\{D(a): a\in S\}$, то полукольцо S будет дистрибутивной решеткой. Булеан $\langle\mathrm{B}(\mathrm{Spec}S), \cup, \cap\rangle$ является булевой решеткой.

Отображение α инъективно $\Leftrightarrow$ *простые идеалы полукольца S разделяют его элементы*, т. е. для любых двух различных элементов a, $b\in S$ существует простой идеал P в S, содержащий ровно один из этих элементов: $a\in P$ и $b\notin P$, либо $a\notin P$ и $b\in P$. Дистрибутивные решетки и булевы кольца обладают указанным свойством. Докажем это в более общем полукольцевом виде.

Произвольное полукольцо, не обязательно коммутативное или имеющее 0 и 1, с тождеством $xx=x$ называется *мультипликативно идемпотентным*. Мультипликативно идемпотентное кольцо называется *булевым*. Заметим, что любое булево кольцо удовлетворяет тождествам $x+x=0$ и $xy=yx$ (упражнение 12).

Теорема 2. *Для того чтобы простые идеалы полукольца S разделяли его элементы, необходимо и достаточно, чтобы S было мультипликативно идемпотентно.*

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть простые идеалы полукольца S разделяют его элементы. Для любых $a\in S$ и $P\in\mathrm{Spec}S$ имеем: $a\in P\Leftrightarrow a^2\in P$, т. е. элементы a и a^2 не разделяются простыми идеалами. Значит, $a^2=a$.

$\Leftarrow$. Возьмем в мультипликативно идемпотентном полукольце S элементы $a\neq b$. Если $a\in bS$ и $b\in aS$, т. е. $a=bs$ и $b=at$ для некоторых s, $t\in S$, то $as=a$, $bt=b$ и $a=abs=abts=abt=b$. Поэтому либо $a\notin bS$, либо $b\notin aS$. Если $a\notin bS$, то применив к $M=\{a\}$ и $J=bS$ предложение 1.1, получим простой идеал P в S, содержащий элемент b и не содержащий элемент a. Аналогично, если $b\notin aS$, то в S найдется простой идеал, содержащий элемент a и не содержащий элемент b.

Теорема А. *Для любой ограниченной дистрибутивной решетки S отображение α является изоморфизмом S на подрешетку $\{D(a)$: $a\in S\}$ булеана $B(SpecS)$ с операциями объединения $\cup$ и пересечения $\cap$.*

Доказательство. В силу сказанного выше и теоремы 2 достаточно доказать включение $D(a)\cup D(b)\subseteq D(a+b)$ для любых a, $b\in S$. Пусть a, $b\in S$ и $P\in D(a)\cup D(b)$, скажем, $P\in D(a)$, т. е. $a\notin P$. Тогда по закону поглощения $a(a+b)=a$ и $a+b\notin P$, т. е. $P\in D(a+b)$.

Теорема В. *Для любого булева кольца S с ненулевой единицей 1 отображение α будет изоморфизмом S на подкольцо $\{D(a)$: $a\in S\}$ булеана $B(SpecS)$ с операциями симметрической разности $\oplus$ и пересечения $\cap$.*

Доказательство. По теореме 2 простые идеалы булева кольца S разделяют его элементы. Остается доказать равенство $D(a+b)=D(a)\oplus D(b)$ для любых a, $b\in S$.

Пусть $P\in D(a+b)$, значит, $a+b\notin P$. По отмеченному выше $P\in D(a)\cup D(b)$. Имеем $(1+a)+(1+b)=a+b\notin P$, откуда $P\in D(1+a)\cup D(1+b)$. Если $P\in D(1+a)$, т. е. $1+a\notin P$, то $a\in P$ в силу $a(1+a)=0$, т. е. $P\notin D(a)$. Если же $P\in D(1+b)$, то $P\notin D(b)$. Следовательно, $D(a+b)\subseteq D(a)\oplus D(b)$.

Обратно, пусть $P\in D(a)\oplus D(b)$, т. е. $P\in D(a)\setminus D(b)$ или $P\in D(b)\setminus D(a)$. Скажем, $P\in D(a)\setminus D(b)$. Тогда $a\notin P$ и $b\in P$, и если $a+b\in P$, то $a=a+b+b\in P$, что невозможно. Аналогично, $P\in D(b)\setminus D(a)$ влечет $a+b\notin P$. Поэтому $a+b\notin P$, т. е. $P\in D(a+b)$. Получили обратное включение $D(a)\oplus D(b)\subseteq D(a+b)$.

Замечание 2. Теоремы А и В суть первые представления абстрактных дистрибутивных решеток и булевых колец решетками и кольцами множеств, полученные американскими математиками Гарретом Биркгофом (1911–1996) и Маршаллом Стоуном (1903–1989) в 30-е годы XX столетия.

Пример 1. Возьмем двухэлементное полукольцо с $S=\{0, 1\}$ нулем 0 и единицей 1. В S умножение определяется однозначно: $0+0=0$ и $0+1=1+0=1$. Если $1+1=0$, то полукольцо S изоморфно двухэлементному полю $\mathbf{Z}_2$, являющемуся булевым кольцом; если же $1+1=1$, то S изоморфно двухэлементной цепи $\mathbf{B}$.

Простой спектр

Для произвольного идеала A полукольца S положим

$$D(A)=\{P\in \mathrm{Spec}S\colon \rceil(A\subseteq P)\} \text{ и } Z(A)=\mathrm{Spec}S\setminus D(A)=\{P\in \mathrm{Spec}S\colon A\subseteq P\}.$$

Для собственного идеала A полукольца S определим *радикал* rad$A$ *идеала* A как пересечение всех простых идеалов, его содержащих: $\mathrm{rad}A=\cap\{P\in\mathrm{Spec}S\colon A\subseteq P\}=\cap Z(A)$. В частности, $D(aS)=D(a)$ и $Z(a)=\{P\in\mathrm{Spec}S\colon a\in P\}$ для всех элементов $a\in S$. Ясно, что $A\subseteq\mathrm{rad}A$ и rad$A$ есть *полупростой* идеал полукольца S: если $a^n\in\mathrm{rad}A$, $a\in S$ и $n\in\mathbf{N}$, то $a\in\mathrm{rad}A$.

Замечание 3. По определению, радикал rad{0} нулевого идеала {0} совпадает с ниль-радикалом rad$S$ самого полукольца S.

Легко видеть, в силу предложения 1, что верно

Предложение 2. *Для любых идеалов A и B полукольца S справедливы следующие утверждения:*

1. $A\subseteq radA$.
2. $A=radA \Leftrightarrow A$ *–полупростой идеал.*
3. $rad(radA)=radA$.
4. $A\subseteq B \Rightarrow radA\subseteq radB$.
5. $D(A)\subseteq D(B) \Leftrightarrow radA\subseteq radB$.
6. $D(A)=D(B) \Leftrightarrow radA=radB$.

Предложение 3. *Для любых идеалов A, B и любого семейства идеалов $(A_i)_{i\in I}$ полукольца S имеют место следующие утверждения:*

1) $A\subseteq B \Rightarrow D(A)\subseteq D(B)$;
2) $D(A)\cup D(B)=D(A+B)$;
3) $\cup_{i\in I}D(A_i)=D(\sum_{i\in I} A_i)$;
4) $D(A)\cap D(B)=D(A\cap B)=D(AB)$;
5) $D(A)=\cup_{a\in A} D(a)$;
6) $\sum_{i\in I} A_i=S \Rightarrow \sum_{i\in F} A_i=S$ *для некоторого конечного множества* $F\subseteq I$.

Доказательство. 1. Очевидно.

2. вытекает из 3.

3. По 1 имеем $\cup_{i\in I}D(A_i)\subseteq D(\sum_{i\in I} A_i)$. Пусть $P\in D(\sum_{i\in I} A_i)$, т. е. идеал $\sum_{i\in I}A_i$ не содержится в P. Тогда и некоторый идеал A_i не лежит в P, т. е. $P\in D(A_i)\subseteq\cup_{i\in I}D(A_i)$ по 1. Получили обратное включение.

4. По 1 $D(AB)\subseteq D(A\cap B)\subseteq D(A)\cap D(B)$. Пусть $P\in D(A)\cap D(B)$, т. е. существуют элементы $a\in A\setminus P$ и $b\in B\setminus P$. Тогда $ab\in AB$, но $ab\notin P$, т. е. $P\in D(AB)$. Следовательно, $D(A)\cap D(B)=D(AB)$, что доказывает утверждение 4.

5. Поскольку $A=\cup_{a\in A} aS=\sum_{a\in A} aS$, то применим утверждение 3.

6. Пусть $\sum_{i\in I} A_i=S$. Тогда $1\in\sum_{i\in I} A_i$, т. е. $1\in\sum_{i\in F} A_i$ для подходящего конечного множества индексов F. Такой идеал $\sum_{i\in F} A_i$ совпадает с S.

Топологизируем множество Spec$S$ простых идеалов полукольца S.

Свойство (1) и утверждения 3 и 4 показывают, что множество

$$\tau=\{D(A)\colon A\in \mathrm{Id}S\}$$

образует *топологию* на множестве Spec$S$ всех простых идеалов полукольца S. Получаем топологическое пространство $\langle \mathrm{Spec}S, \tau\rangle$, называемое *простым спектром* полукольца S. Множества $D(A)$, по всем идеалам A в S, называются *открытыми множествами* топологического пространства Spec$S$, а их дополнения $Z(A)=\mathrm{Spec}S\setminus D(A)=\{P\in \mathrm{Spec}S\colon A\subseteq P\}$ – *замкнутыми множествами*. Утверждение 5 предложения 3 означает, что открытые множества $D(a)$, $a\in S$, составляют (открытую) *базу* топологии τ. Топология τ относительно включения $\subseteq$, как показывают свойство (1) и утверждение 3 предложения 3, будет полной решеткой с наименьшим элементом $\varnothing$ и наибольшим элементом Spec$S$.

Множество Max$S$ всех максимальных идеалов полукольца S является непустым подмножеством множества Spec$S$ по теореме 1. Рассмотрим Max$S$ как подпространство простого спектра с индуцированной топологией: открытыми множествами в Max$S$ будут множества $D(A)\cap \mathrm{Max}S$ по всем $A\in \mathrm{Id}S$. Полученное топологическое пространство Max$S$ называется *максимальным спектром* полукольца S. Равенство Max$S$=Spec$S$ означает максимальность всех простых идеалов полукольца S.

Замечание 4. Элементами, точками простого спектра Spec$S$ (максимального спектра Max$S$), как топологического пространства, служат простые идеалы (максимальные идеалы) полукольца S.

Рассмотрим топологические свойства простого спектра Spec$S$.

Топологическое пространство X называется:

– T_0-*пространством*, если для любых двух его различных точек существует открытое множество в X, содержащее ровно одну из них;

– T_1-*пространством*, если для любых двух его различных точек x, y существует открытое множество в X, содержащее x и не содержащее y;

– *хаусдорфовым* (T_2-*пространством*), если для любых двух его различных точек x, y в X существуют непересекающиеся открытые множества U и V, такие, что $x\in U$ и $y\in V$;

– *компактным*, если каждое его открытое покрытие $X=\cup_{i\in I}U_i$ содержит конечное подпокрытие $X=\cup_{i\in F}U_i$, где множества U_i ($i\in I$) открыты в X и F – конечное подмножество в I.

Теорема 3. *Имеют место следующие утверждения:*

1. *Простой спектр Spec$S$ полукольца S является компактным T_0-пространством.*

2. О*ткрытые множества $D(a)$, $a\in S$, будут компактными множествами пространства Spec$S$.*

3. *Максимальный спектр Max$S$ полукольца S является компактным T_1-пространством.*

Доказательство. 1. Пусть $P\neq Q$ – различные точки Spec$S$. Имеем $\rceil(P\subseteq Q)$ или $\rceil(Q\subseteq P)$. В первом случае найдется элемент $a\in P\setminus Q$, и тогда $Q\in D(a)$ и $P\notin D(a)$. Во втором случае, для некоторого элемента $a\in S$ получаем $P\in D(a)$ и $Q\notin D(a)$. Тем самым, Spec$S$ есть T_0-пространство.

Для доказательства компактности пространства Spec$S$ возьмем произвольное его открытое покрытие $\cup_{i\in I}U_i$. Для каждого индекса $i\in I$ имеем $U_i=D(A_i)$ для соответствующего идеала A_i полукольца S. В силу утверждения 3) предложения 3 $\mathrm{Spec}S=\cup_{i\in I}D(A_i)=D(\sum_{i\in I} A_i)$. Если идеал $\sum_{i\in I} A_i$ – собственный, то по теореме 1, свойства 3) и 2), он содержится в некотором простом идеале P, что невозможно. Значит, $\sum_{i\in I} A_i=S$, откуда по утверждению 6) предложения 3 $\sum_{i\in F}A_i=S$ для некоторого конечного множества $F\subseteq I$. Поэтому $\mathrm{Spec}S=D(S)=D(\sum_{i\in F}A_i)=\cup_{i\in F}D(A_i)=\cup_{i\in F}U_i$ – конечное подпокрытие данного открытого покрытия $\cup_{i\in I}U_i$. Что доказывает компактность Spec$S$.

2. Компактность открытого множества $D(a)$, $a\in S$, доказывается точно так же, как компактность $\mathrm{Spec}S=D(1)$.

3. Если $M\neq N$ в Max$S$, то существует элемент $a\in N\setminus M$, т. е. $M\in D(a)$ и $N\notin D(a)$. Стало быть, Max$S$ есть T_1-пространство. Компактность пространства Max$S$ доказывается аналогично компактности Spec$S$.

Теорема С. *Для любой ограниченной дистрибутивной решетки S множества $D(a)$, $a\in S$, суть в точности компактные открытые множества компактного T_0-пространства Spec$S$.*

Доказательство. В силу теоремы 3, пункты 1 и 2, достаточно показать, что любое компактное открытое множество U простого спектра равно $D(a)$ для некоторого элемента $a\in S$. Имеем $U=D(A)$ для подходящего идеала A полукольца S. По утверждению 5) предложения 3 $D(A)=\cup_{a\in A} D(a)$ – открытое покрытие компактного множества $U=D(A)$. Тогда $U=\cup_{a\in F} D(a)$ для конечного множества $F=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}\subseteq A$. На основании теоремы A $U=D(a_1)\cup D(a_2)\cup\ldots\cup D(a_n)=D(a_1+a_2+\ldots+a_n)$, что и требовалось доказать.

Наделим цепь **B** топологией *связного двоеточия*, считая множество {1} открытым и незамкнутым. Получаем топологическую дистрибутивную решетку **B**.

Для произвольного топологического пространства X положим:

$$C(X, \mathbf{B})=\{f: X \to \mathbf{B}: f \text{ – непрерывная функция}\} \text{ –}$$

это дистрибутивная решетка непрерывных **B**-значных функций на X с поточечными операциями сложения и умножения функций:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \text{ и } (fg)(x)=f(x)g(x) \text{ для всех } f, g\in C(X, \mathbf{B}) \text{ и } x\in X.$$

Предложение 4. *Любая дистрибутивная решетка S с ненулевой единицей изоморфно вкладывается в дистрибутивную решетку $C(\mathrm{Spec}S, \mathbf{B})$, причем, если решетка S конечная, то она изоморфна решетке $C(\mathrm{Spec}S, \mathbf{B})$.*

Доказательство. Пусть S – ограниченная дистрибутивная решетка с $1\neq 0$. Для каждого элемента $a\in S$ определим функцию f_a: $\mathrm{Spec}S \to \mathbf{B}=\{0, 1\}$ формулой:

$$f_a(P)=1 \Leftrightarrow P\in D(a) \ \forall\ P\in \mathrm{Spec}S.$$

Тем самым, f_a есть характеристическая функция множества $D(a)\subseteq \mathrm{Spec}S$. Функция f_a будет непрерывной функцией $\mathrm{Spec}S\to\mathbf{B}$ с компактным прообразом $(f_a)^{-1}=D(a)$ в силу теоремы C. Если f: $\mathrm{Spec}S \to \mathbf{B}$ – какая-то непрерывная функция, то множество $f^{-1}(\{1\})$ открыто в пространстве $\mathrm{Spec}S$. И если, кроме того, множество $f^{-1}(\{1\})$ компактно, то по теореме C имеем $f^{-1}(\{1\})=D(a)$ для некоторого элемента $a\in S$, т. е. $f=f_a$.

Определим отображение γ: $S \to C(\mathrm{Spec}S, \mathbf{B})$, $\gamma(a)=f_a$ для любого $a\in S$. Легко видеть, опираясь на теорему A, что γ является изоморфным вложением абстрактной дистрибутивной решетки S в дистрибутивную решетку $C(\mathrm{Spec}S, \mathbf{B})$ всех непрерывных {0, 1}-значных функций, заданных на простом спектре $\mathrm{Spec}S$: для любых a, $b\in S$ имеем $\gamma(a+b)=\gamma(a)+\gamma(b)$, $\gamma(ab)=\gamma(a)\gamma(b)$ и, в силу теоремы A, $\gamma(a)=\gamma(b)$ влечет $a=b$. При этом $\gamma(0)$ и $\gamma(1)$ – функция-константа 0 и функция-константа 1, соответственно. Изоморфным образом $\gamma(S)$ решетки S будет подрешетка решетки $C(\mathrm{Spec}S, \mathbf{B})$, содержащая в точности те непрерывные функции f, которые имеют компактные прообразы $f^{-1}(\{1\})$. Если исходная дистрибутивная решетка S – конечная, то γ – решеточный изоморфизм S на $C(\mathrm{Spec}S, \mathbf{B})$.

Пример 2. Пусть $S=L_3\times L_3$ – девятиэлементная дистрибутивная решетка, равная прямому произведению трехэлементной цепи $L_3=\{0<\theta<1\}$ на себя. По предложению 4 решетка S изоморфна $C(\mathrm{Spec}S, \mathbf{B})$ с помощью изоморфизма γ. Найдем простой спектр $\mathrm{Spec}S$. Обозначим: $0=(0,0)$, $a=(0,\theta)$, $b=(0,1)$, $c=(\theta,0)$, $d=(\theta,\theta)$, $e=(\theta,1)$, $f=(1,0)$, $g=(1,\theta)$, $1=(1,1)$. Все идеалы конечной решетки $S=\{0, a, b, c, d, e, f, g, 1\}$ главные, т. е. равны sS при $s\in S$. Простыми будут четыре идеала $P=bS$, $M=eS$, $Q=fS$, $N=gS$, два из которых M, N – максимальные, т. е. $\mathrm{Spec}S=\{bS, eS, fS, gS\}=\{P, Q, M, N\}$ и $\mathrm{Max}S=\{M, N\}$. Открытыми множествами простого спектра $\mathrm{Spec}S$ дистрибутивной решетки S являются базисные открытые множества $D(a)=\{Q\}$, $D(b)=\{Q, N\}$, $D(c)=\{P\}$, $D(d)=\{P, Q\}$, $D(e)=\{P, Q, N\}$, $D(f)=\{P, M\}$, $D(g)=\{P, Q, M\}$, не считая $D(0)=\varnothing$ и $D(1)=\mathrm{Spec}S$.

Имеем $\gamma(s)=f_s\in C(\mathrm{Spec}S, \mathbf{B})=C(\{P, Q, M, N\}, \{0, 1\})$ для любого элемента $s\in S$, при этом f_s – характеристическая функция множества $D(s)$. Вычислим, скажем, функцию f_e. Поскольку $D(e)=\{P, Q, N\}$, то $f_e(P)=1$, $f_e(Q)=1$, $f_e(M)=0$, $f_e(N)=1$. Поэтому функцию f_e можно отождествить со строкой (1, 1, 0, 1), имея в виду указанный порядок простых идеалов в спектре – P, Q, M, N. Тогда получаем: $f_0=(0,0,0,0)$; $f_a=(0,1,0,0)$; $f_b=(0,1,0,1)$; $f_c=(1,0,0,0)$; $f_d=(1,1,0,0)$; $f_e=(1,1,0,1)$; $f_f=(1,0,1,0)$; $f_g=(1,1,1,0)$; $f_1=(1,1,1,1)$. Так как γ – решеточный изоморфизм, то операции сложения и умножения элементов в S отвечают операциям сложения и умножения упорядоченных четверок, состоящих из 0 и 1. Например, $\gamma(b+c)=\gamma(e)=f_e=(1,1,0,1)=(0,1,0,1)+(1,0,0,0)=f_b+f_c=\gamma(b)+\gamma(c)$. При этом γ осуществляет изоморфное вложение S в булеву решетку $\mathbf{B}^4=\mathbf{B}\times\mathbf{B}\times\mathbf{B}\times\mathbf{B}$.

Подмножество топологического пространства называется *открыто-замкнутым*, если оно одновременно открыто и замкнуто. T_1-пространство называется *нульмерным*, если его открыто-замкнутые множества образуют (открытую) базу в нем. Компактное хаусдорфово пространство называется *компактом*.

Теорема D. *Максимальный спектр MaxS любого булева кольца S с ненулевой единицей 1 является нульмерным компактом, причем, множества $D(a)$, $a\in S$, суть в точности компактные открытые множества в MaxS.*

Доказательство. Пусть $a\in S$. Открытое множество $D(a)$ компактно по пункту 2 теоремы 3. Поскольку $D(a+1)=\mathit{SpecS}\backslash D(a)$, то множество $D(a)$ открыто-замкнуто. По пункту 1 теоремы 3 пространство $\mathrm{Spec}S$ является T_0-пространством. Возьмем $P\neq Q$ в $\mathrm{Spec}S$. Тогда, скажем, $Q\in D(a)$ и $P\notin D(a)$ для подходящего элемента $a\in S$. Поэтому Q лежит в открыто-замкнутом множестве $D(a)$, а P – в его дополнении $D(a+1)$. Значит, пространство Spec$S$ хаусдорфово. Любое открытое в Spec$S$ множество имеет вид $D(A)$ для некоторого идеала A полукольца S. В силу утверждения 5) предложения 3 $D(A)$ будет объединением «базисных» открыто-замкнутых множеств $D(a)$, $a\in A$. Следовательно, Spec$S$ есть нульмерное компактное хаусдорфово пространство.

Замечание 5. Максимальный спектр Max$S$ произвольного булева кольца S, не обязательно содержащего единицу, совпадает с простым спектром Spec$S$ кольца S и является нульмерным локально компактным хаусдорфовым пространством. Если булево кольцо S без единицы, то пространство Max$S$ не компактно, но компактны базисные открытые множества $D(a)$, $a\in S$.

Наделим поле $\mathbf{Z}_2$ *дискретной* топологией, т. е. множество {1} будем считать открыто-замкнутым. С дискретной топологией $\mathbf{Z}_2$ становится топологическим булевым кольцом.

Рассмотрим булево кольцо $C(\mathrm{Max}S, \mathbf{Z}_2)$ всех непрерывных $\mathbf{Z}_2$-значных функций на максимальном спектре Max$S$ с поточечно заданными операциями сложения и умножения функций.

Предложение 5. *Любое булево кольцо S с ненулевой единицей изоморфно булевому кольцу $C(MaxS, \mathbf{Z}_2)$, причем, если S конечно, то оно изоморфно булеану$\langle B(MaxS), \oplus, \cap\rangle$.*

Доказательство. Возьмем произвольное булево кольцо S с $1\neq 0$. Как и при доказательстве предложения 4, для любого $a\in S$ определим функцию f_a: Max$S \to \mathbf{Z}_2=\{0, 1\}$ формулой: $f_a(P)=1 \Leftrightarrow P\in D(a)$ $\forall$ $P\in$Max$S$. Функция f_a будет непрерывной функцией Max$S \to \mathbf{Z}_2$ с компактным прообразом $(f_a)^{-1}=D(a)$ в силу теоремы D. Если функция f: Max$S \to \mathbf{Z}_2$ непрерывна, то множество $f^{-1}(\{1\})$ открыто-замкнуто в пространстве Max$S$. Поэтому множество $f^{-1}(\{1\})$ компактно, и по теореме D оно равно $D(a)$ для некоторого элемента $a\in S$, т. е. $f=f_a$.

Далее введем отображение γ: $S \to C(\mathrm{Max}S, \mathbf{Z}_2)$, $\gamma(a)=f_a$ для всех $a\in S$. На основании теоремы B γ осуществляет изоморфизм исходного булева кольца S на булево кольцо непрерывных функций $C(\mathrm{Max}S, \mathbf{Z}_2)$. Если булево кольцо S конечно, то Max$S$ – конечное дискретное пространство. Поэтому, в силу теоремы B, $C(\mathrm{Max}S, \mathbf{Z}_2)$ изоморфно булеану B(Max$S$) с операциями $\oplus$ и $\cap$.

Пример 3. Пусть S – множество всех конечных и *коконечных* (дополнений до конечных) подмножеств натурального ряда $\mathbf{N}$. Относительно сложения $\oplus$ и умножения $\cap$ множество S становится счетным булевым кольцом. Характеристические функции конечных (коконечных) подмножеств в $\mathbf{N}$ представляют собой последовательности из 0 и конечного числа 1 (из 1 и конечного числа 0), которые складываются и умножаются покоординатно, причем, 1+1=0. Тем самым булево кольцо S изоморфно прямой сумме счетного семейства полей $\mathbf{Z}_2$: $\oplus_{n\in\mathbf{N}}\mathbf{Z}_2 \subset \prod_{n\in\mathbf{N}}\mathbf{Z}_2$. По предложению 5 S изоморфно булеву кольцу $C(\mathrm{Max}S, \mathbf{Z}_2)$ всех непрерывных $\mathbf{Z}_2$-значных функций на нульмерном компакте Max$S$, гомеоморфном Max$C(\mathrm{Max}S, \mathbf{Z}_2)$. Множества $M_p=\{f\in C(\mathrm{Max}S, \mathbf{Z}_2)\colon f(p)=0\}$, $p\in$Max$S$, являются максимальными идеалами булева кольца $C(\mathrm{Max}S, \mathbf{Z}_2)$. Отметим, что собственный идеал $J=\{f\in C(\mathrm{Max}S, \mathbf{Z}_2)$: $f=0$ почти всюду$\}$ кольца $C(\mathrm{Max}S, \mathbf{Z}_2)$ не содержится ни в одном идеале M_p, $p\in$Max$S$, но, по пункту 3) теоремы 1, J содержится в некотором максимальном идеале M кольца $C(\mathrm{Max}S, \mathbf{Z}_2)$.

Ниль-радикал

Идеал rad$S$ называется *ниль-радикалом* полукольца S.

Хорошо известно, что для колец ниль-радикал фактор-кольца кольца S по его ниль-радикалу – нулевой, т. е. rad(S/rad$S$)={0}.

Рассмотрим конгруэнцию Бёрна β полукольца S по идеалу rad$S$.

Предложение 6. *Для антикольца S справедливы следующие утверждения:*

1) *radS – строгий идеал;*

2) $[0]_\beta$=*radS;*

3) *rad*$(S/\beta)=\{0\}$ *– нулевой идеал фактор-полукольца S/β.*

Доказательство. 1. Пусть a, $b\in S$ и $a+b\in$rad$S$. Имеем $(a+b)^n=0$ для некоторого натурального числа n. Тогда $a^n+\ldots+b^n=0$, откуда $a^n=0$ для антикольца S, т. е. $a\in$rad$S$.

2. Для строгого идеала rad$S$ имеет место равенство $[0]_\beta$=rad$S$.

3. Предположим, что $([c]_\beta)^n=[0]_\beta$, где $n\in\mathbf{N}$. Тогда $[c^n]_\beta=[0]_\beta$, т. е. $(c^n)\beta 0$ и $c^n+a=b\in$rad$S$. В силу 1 $c^n\in$rad$S$, т. е. $(c^n)^m=0$ при некотором $m\in\mathbf{N}$. Значит, $c^{nm}=0$ и $c\in$rad$S$. На основании 2 $[c]_\beta=[0]_\beta$ – нулевой элемент фактор-полукольца S/β.

Пример 4. Возьмем $(n+1)$-элементную цепь S: $0=a^n<a^{n-1}<\ldots<a<1$ с порядковым сложением и циклическим умножением. Получаем коммутативное аддитивно идемпотентное полукольцо S с $1\neq 0$, имеющее ровно n собственных идеалов: $\{0\}\subset\{0, a^{n-1}\}\subset\{0, a^{n-1}, a^{n-2}\}\subset\ldots\subset\{0, a^{n-1},\ldots, a\}=S\setminus\{1\}$. Все идеалы в S – строгие. Полукольцо S обладает единственным простым идеалом, равным максимальному (наибольшему собственному) идеалу $S\setminus\{1\}$, совпадающему с rad$S$. Поэтому полукольцо S удовлетворяет *условию максимальности простых идеалов*, а также *аннуляторному условию*: аннуляторы различных элементов различны. Кроме того, любая конгруэнция на полукольце S является конгруэнцией Бёрна ρ по некоторому идеалу J полукольца S: $J_k=\{0, a,..., a^k\}$ при $k=1, ..., n-1$; нулевому; несобственному S. Именно, нулевой класс $[0]_\rho$ равен J, а остальные классы конгруэнции ρ – одноэлементные. Решетка идеалов IdS и решетка конгруэнций Con$S$ суть $(n+1)$-элементные цепи, т. е. они изоморфны: Id$S\cong$Con$S$.

Пример 5. Рассмотрим множество $S[x]$ всех многочленов с коэффициентами из фиксированного полукольца S от одной переменной x, коммутирующей с элементами полукольца S. Относительно обычных операций над многочленами $S[x]$ будет коммутативным полукольцом с 0 и 1. Нетрудно проверить, что ниль-радикал rad $S[x]$=(rad$S$)$[x]$ есть множество всех многочленов из $S[x]$ с нильпотентными коэффициентами. В случае антикольца S полукольцо $S[x]$ также будет антикольцом. Тогда по предложению 4 идеалы rad$S$ и rad $S[x]$ – строгие и ниль-радикалы фактор-полуколец S/β и $S[x]/\beta$ по соответствующим конгруэнциям Берна – нулевые.

Пример 6. Для натурального числа n возьмем главный идеал $x^nS[x]$ полукольца многочленов $S[x]$. Очевидно, идеал $x^nS[x]$ – полустрогий, стало быть, он равен классу 0 конгруэнции Берна ρ на полукольце $S[x]$ по $x^nS[x]$. Положим $T=S[x]/\rho$. Полукольцо T можно отождествить с множеством всех многочленов из $S[x]$ степени $\leq n-1$ с обычным сложением многочленов и обычным умножением многочленов, но с учетом соотношения $x^n\equiv 0$. Имеем rad$T$=rad$S\cup xT$. И если S – антикольцо, то $T/\beta\cong S/\beta$.

Упражнения

В упражнениях S – коммутативное полукольцо с 0 и $1\neq 0$.

1. Сумма $A+B$ идеалов A и B полукольца S является идеалом в S.

2. Пересечение $\cap A_i$ любого непустого семейства $(A_i)_{i\in I}$ идеалов полукольца S – идеал в S.

3. Когда объединение $A\cup B$ идеалов A и B полукольца S будет идеалом в S?

4. Объединение $\cup A_i$ любой цепи $\{A_i: i\in I\}$ идеалов полукольца S является идеалом в S.

5. Когда пересечение $A\cap B$ простых идеалов A и B полукольца S будет простым идеалом в S?

6. Объединение и пересечение любой цепи простых идеалов $\{A_i: i\in I\}$ полукольца S будут простыми идеалами в S.

7. Множество IdS всех идеалов полукольца S, рассматриваемое с отношением включения $\subseteq$, образует полную решетку.

8. Для каких элементов $a\in S$ верно равенство $aS=\{a\}$? $aS=\{0\}$? $aS=\{1\}$?

9. Для каких элементов $a\in S$ верно равенство $aS=S$?

10. Полукольцо S *идеал-простое* (имеет ровно два идеала) $\Leftrightarrow$ S – полукольцо с делением.

11. Полукольцо S – полукольцо с делением $\Leftrightarrow$ S является полем или полуполем.

12. В любом булевом кольце выполняются тождества $x+x=0$ и $xy=yx$.

13. Найдите простой спектр и максимальный спектр дистрибутивной решетки, изоморфной прямому произведению двухэлементной цепи и трехэлементной цепи.

14. Найдите простой спектр k-элементной цепи L_k.

15. Идеалы аддитивно сократимого полукольца $\langle \mathbf{N}_0, +, \cdot\rangle$ будут идеалами аддитивно идемпотентного полукольца $\langle \mathbf{N}_0, \vee, \cdot\rangle$, где $\vee$=max.

16. Опишите все идеалы полуколец $\langle \mathbf{N}_0, \vee, \cdot\rangle$ и $\langle \mathbf{N}_0, \wedge, \cdot\rangle$, где $\wedge$=min.

17. Изоморфны ли полукольца $\langle \mathbf{N}_0, \vee, \cdot\rangle$ и $\langle \mathbf{N}_0, \wedge, \cdot\rangle$?

18. Проверьте, что следующая алгебраическая структура является аддитивно идемпотентным полуполем: а) $\langle \mathbf{R}\cup\{-\infty\}, \vee, +\rangle$; б) $\langle \mathbf{R}\cup\{\infty\}, \wedge, +\rangle$;

в) $\langle \mathbf{R}^+, \vee, \cdot\rangle$. Здесь операция сложения $\vee$ ($\wedge$) есть взятие max (min) с наименьшим (наибольшим) элементом $-\infty$ (∞), а + и· суть обычные операции сложения и умножения чисел с учетом равенств $(-\infty)+r=r+(-\infty)=(-\infty)$, $(-\infty)+(-\infty)=(-\infty)$, $\infty+r=r+\infty=\infty$, $\infty+\infty=\infty$ для всех $r\in\mathbf{R}$.

19. Докажите, что полуполя $\langle \mathbf{R}\cup\{-\infty\}, \vee, +\rangle$ и $\langle \mathbf{R}^+, \vee, \cdot\rangle$ изоморфны.

20. Покажите, что полуполя $\langle \mathbf{R}\cup\{\infty\}, \wedge, +\rangle$ и $\langle \mathbf{R}^+, \vee, \cdot\rangle$ изоморфны.

Учебные исследовательские задачи

В этом разделе S – произвольное полукольцо.

1. Когда $A\subseteq A+B$ для подполуколец A и B полукольца S?

2. Найдите условия на полукольцо S, при выполнении которых $A\subseteq A+B$ для любых идеалов A и B в S.

3. Когда сумма $A+B$ подполуколец A и B полукольца S будет подполукольцом в S?

4. Найдите условия на полукольцо S, при которых сумма $A+B$ любых идеалов A и B полукольца S будет идеалом в S?

5. Когда пересечение всех идеалов коммутативного полукольца S будет идеалом в S? А для некоммутативного полукольца S?

6. Когда элемент a полукольца S принадлежит главному правому идеалу aS (главному левому идеалу Sa)? Когда $a \in aS \cap Sa$?

7. При каких условиях на полукольцо S верно $a \in aS$ ($a \in Sa$, $a \in aS \cap Sa$) для всех $a \in S$?

8. Опишите наименьший идеал произвольного полукольца S, содержащий элемент $a \in S$.

9. Когда $aS=S$ ($Sa=S$) для элемента $a \in S$?

10. При каких условиях на полукольцо S верно $aS=S$ ($Sa=S$) для всех $a \in S$?

11. Чему равна точная верхняя грань $\sup(A, B)$ идеалов A и B полукольца S в решетке $\mathrm{Id}S$?

12. Когда решетка $\mathrm{Id}S$ будет полной решеткой?

13. Множество $\mathrm{Con}S$ всех конгруэнций на полукольце S, рассматриваемое с отношением включения $\subseteq$, образует полную решетку.

14. Чему равна точная верхняя грань $\sup(\rho, \sigma)$ конгруэнций ρ и σ на полукольце S в решетке $\mathrm{Con}S$?

15. Что из себя представляет решетка $\mathrm{Con}S$ для n-элементной цепи S? Начните с n=2, 3, 4.

16. Пусть S, T – произвольные полукольца с 0 и 1. Тогда $\mathrm{Id}(S \times T) \cong \mathrm{Id}S \times \mathrm{Id}T$.

17. Если S, T – полукольца с 0 и 1, то $\mathrm{Con}(S \times T) \cong \mathrm{Con}S \times \mathrm{Con}T$.

18. Когда коммутативное полукольцо будет идеал-простым?

19. Когда коммутативное полукольцо будет *конгруэнц-простым*, т. е. имеет ровно две конгруэнции?

20. Опишите все конгруэнции на полуполе $\mathbf{R}^+$ всех неотрицательных действительных чисел.

21. Исследуйте кольцо $M_2(\mathbf{Z}_2)$ всех квадратных матриц второго порядка над двухэлементным полем $\mathbf{Z}_2$. Найдете в этом кольце: 1) элементы – обратимые, делители нуля, идемпотентные, нильпотентные, центральные; 2) идеалы – односторонние и двусторонние; 3) решетки левых и правых идеалов.

22. Исследуйте полукольцо $M_2(\mathbf{B})$ всех квадратных матриц второго порядка над двухэлементной цепью $\mathbf{B}$. Выполните задания 1)–3) из предыдущей задачи. Сравните свойства полуколец $M_2(\mathbf{B})$ и $M_2(\mathbf{Z}_2)$.

23. Исследуйте свойства полуколец $M_3(\mathbf{B})$ и $M_2(L_3)$ для трехэлементной цепи L_3.

24. $M_n(\mathbf{Z}_p)$ – регулярное и идеально-простое кольцо для любых натурального числа n и простого числа p, где $\mathbf{Z}_p$ – p-элементное поле.

25. Изучите свойства полуколец $M_n(L_k)$ для произвольных натуральных чисел n и k.

26. Для восьмиэлементного булева кольца $S=\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ найдите максимальный спектр $\mathrm{Max}S$ и изоморфизм γ.

27. Докажите, что любое мультипликативно идемпотентное полукольцо с нулем коммутативно в нуле.

28. Покажите, что двусторонность всех односторонних идеалов произвольного мультипликативно идемпотентного полукольца влечет его коммутативность.

29. Докажите, что любое конечное булево кольцо изоморфно вложимо в счетное булево кольцо из примера 3.

30. Установите естественное взаимно однозначное соответствие между классом всех булевых колец и классом всех булевых решеток.

Заключение

1. Теория полуколец – актуальный и развивающийся раздел абстрактной алгебры, которая, в свою очередь, является важной и неотъемлемой частью современной математики. Понятие полукольца достаточно общо и, в то же самое время, достаточно содержательно для применений внутри математики и в компьютерных науках. Результаты и методы теории полуколец используются в многочисленных приложениях математики.

2. Материал статьи представляет собой краткое введение в теорию полуколец. Предложенная система учебных и учебно-исследовательских задач позволяет студентам осознанно усвоить понятийный аппарат теории полуколец.

3. Изучение полукольцевой структуры целесообразно начинать с рассмотрения коммутативных полуколец с нулем и единицей. Для первоначального знакомства с теорией полуколец хорошо подходит тема простых идеалов.

4. Понятие полукольца может быть включено в курс общей алгебры при обучении бакалавров-математиков. В Вятском государственном университете (ВятГУ) магистранты-математики знакомятся с полукольцами при изучении дисциплин «Современная алгебра» [7] и «Упорядоченные множества и решетки» [5; 8, глава 3], а для аспирантов-алгебраистов читается курс «Функциональная алгебра и полукольца» [3].

5. В настоящее время на кафедре фундаментальной математики ВятГУ ведется студенческий учебно-исследовательский семинар по алгебре [9], на котором изучаются темы «Мультипликативно идемпотентные полукольца» [12] и «Полукольца непрерывных функций» [10].

Список литературы

1. *Атья М., Макдональд И.* Введение в коммутативную алгебру : пер. с англ. М. : Мир, 1972. 160 с.
2. *Биркгоф Г.* Теория решеток. М. : Наука, 1984. 568 с.
3. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М.* Обучение аспирантов направления подготовки «Математика и механика» // Н. И. Лобачевский и математическое образование в России: материалы Международного форума по математическому образованию, посвященного 225-летию Н. И. Лобачевского. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2017. Т. 1. С. 48–52.
4. *Вечтомов Е. М.* Введение в полукольца: учебное пособие. Киров : Изд-во ВГПУ, 2000. 44 с.
5. *Вечтомов Е. М.* Курс «Упорядоченные множества и решетки» для магистрантов-математиков // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2011. Вып. 13. С. 169–186.
6. *Вечтомов Е. М.* Тестовые задачи по абстрактной алгебре : материалы IV Всероссийской научно-практической конференции «Преподавание математики в школах и вузах: проблемы содержания, технологии и методики». Глазов : ГГПИ имени В. Г. Короленко, 2012. С. 8–15.
7. *Вечтомов Е. М.* Курс «Современная алгебра» для магистрантов математических профилей : сборник статей по материалам Всероссийской научно-практической конференции преподавателей, аспирантов, магистрантов и учителей. Н. Новгород : НГПУ им. К. Минина, 2013. С. 47–52.
8. *Вечтомов Е. М.* Математика: основные математические структуры : учебное пособие. Изд. 2-е. М. : Юрайт, 2018. 296 с.
9. *Вечтомов Е. М.* Студенческий учебно-исследовательский семинар по алгебре // Математический вестник Вятского государственного университета. 2021. № 3.
10. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Сидоров В. В., Чупраков Д. В.* Элементы функциональной алгебры : монография в 2-х т.; под ред. Е. М. Вечтомова. Киров : Радуга-ПРЕСС, 2016. Т. 1. 384 с. Т. 2. 316 с.
11. *Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Чермных В. В.* Элементы теории полуколец : монография. Киров : Радуга-ПРЕСС, 2012. 228 с.
12. *Вечтомов Е. М., Петров А. А.* Полукольца с идемпотентным умножением : монография. Киров : Радуга-ПРЕСС, 2015. 144 с.
13. *Вечтомов Е. М., Сидоров В. В.* Абстрактная алгебра. Базовый курс : учебное пособие. Киров : Радуга-ПРЕСС, 2014. 260 с.
14. *Вечтомов Е. М., Чермных В. В.* Изучение алгебраической структуры // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2012. № 1 (3). С. 41–48.
15. *Гретцер Г.* Общая теория решеток : пер. с англ. М. : Мир, 1982. 456 с.
16. *Калужнин Л. А.* Введение в общую алгебру. М. : Наука, 1973. 448 с.
17. *Ламбек И.* Кольца и модули : пер. с англ. М. : Мир, 1971. 280 с.
18. *Скорняков Л. А.* Элементы теории структур. Изд. 2-е. М. : Наука, 1982. 160 с.
19. *Скорняков Л. А.* Элементы алгебры. Изд. 2-е. М. : Наука, 1986. 240 с.
20. *Скорняков Л. А.* Элементы общей алгебры. М. : Наука, 1983. 272 с.
21. *Энгелькинг Р.* Общая топология : пер. с англ. М. : Мир, 1986. 752 с.
22. *Golan J. S.* Semirings and their Applications. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1999. 382 p.

The study of the basics of the theory of semirings. Simple ideals

E. M. Vechtomov

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, Head of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-3490-2956. E-mail: vecht@mail.ru

Abstract. The work is of a mathematical and methodological nature. The issues of the content and methodology of the initial study of the abstract theory of semi-rings are analyzed. An original presentation of the introduction to the theory of semi-rings is given. It is advisable to start teaching students the modern theory of semirings by studying commutative semirings. The topic of prime ideals in the structural theory of commutative semirings with zero and one is considered. Relevant examples have been analyzed. A system of educational exercises and educational and research tasks about semi-rings is proposed.

Keywords: semiring, commutative semicircle, prime ideal, teaching the theory of semicircles, exercise, educational research task.

References

1. *Atiya M., MacDonald I. Vvedenie v kommutativnuyu algebru : per. s angl.* [Introduction to commutative algebra : transl. from English]. M. Mir (World). 1972. 160 p.
2. *Birkhoff G. Teoriya reshetok* [Theory of lattices]. M. Nauka (Science). 1984. 568 p.
3. *Varankina V. I., Vechtomov E. M. Obuchenie aspirantov napravleniya podgotovki "Matematika i mekhanika"* [Training of postgraduate students in the field of Mathematics and mechanics] // *N. I. Lobachevskij i matematicheskoe obrazovanie v Rossii: materialy Mezhdunarodnogo foruma po matematicheskomu obrazovaniyu, posvyashchennogo 225-letiyu N. I. Lobachevskogo* – N. I. Lobachevsky and mathematical education in Russia: Materials of the International forum

on mathematical education dedicated to the 225th anniversary of N. I. Lobachevsky. Kazan. Kazan University Publishing House. 2017. Vol. 1. Pp. 48–52.

4. *Vechtomov E. M. Vvedenie v polukol'ca: uchebnoe posobie* [Introduction to semirings: textbook]. Kirov. VSPU Publishing House. 2000. 44 p.

5. *Vechtomov E. M. Kurs "Uporyadochennye mnozhestva i reshetki" dlya magistrantov-matematikov* [Course "Ordered sets and lattices" for undergraduates-mathematicians] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona* – Mathematical herald of pedagogical colleges and universities of the Volga-Vyatka region. 2011. Is. 13. Pp. 169–186.

6. *Vechtomov E. M. Testovye zadachi po abstraktnoj algebre : materialy IV Vserossijskoj nauchno-prakticheskoj konferencii "Prepodavanie matematiki v shkolah i vuzah: problemy soderzhaniya, tekhnologii i metodiki"* [Test problems in abstract algebra : materials of the IV All-Russian Scientific and Practical conference "Teaching mathematics in schools and universities: problems of content, technology and methodology"]. Glazov. GSPI n. a. V. G. Korolenko. 2012. Pp. 8–15.

7. *Vechtomov E. M. Kurs "Sovremennaya algebra" dlya magistrantov matematicheskih profilej : sbornik statej po materialam Vserossijskoj nauchno-prakticheskoj konferencii prepodavatelej, aspirantov, magistrantov i uchitelej* [Course "Modern algebra" for students of mathematical profiles : collection of articles on materials of all-Russian scientific-practical conference of lecturers, post-graduate and master students and teachers]. N. Novgorod. NSPU n. a. K. Minin. 2013. Pp. 47–52.

8. *Vechtomov E. M. Matematika: osnovnye matematicheskie struktury : uchebnoe posobie* [Mathematics: basic mathematical structure : tutorial]. 2nd publ. M. Yurayt. 2018. 296 p.

9. *Vechtomov E. M. Studencheskij uchebno-issledovatel'skij seminar po algebre* [Student research seminar in algebra] // *Matematicheskij vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo universiteta* – Mathematical herald of Vyatka State University. 2021. No. 3.

10. *Vechtomov E. M., Lubyagina E. N., Sidorov V. V., Chuprakov D. V. Elementy funkcional'noj algebry : monografiya v 2-h t.* [Elements of functional algebra : monograph in 2 volumes]; ed. by E. M. Vechtomov. Kirov. Raduga-PRESS. 2016. Vol. 1. 384 p. Vol. 2. 316 p.

11. *Vechtomov E. M., Lubyagina E. N., Chermnyh V. V. Elementy teorii polukolec : monografiya* [Elements of the theory of semirings : monograph]. Kirov. Raduga-PRESS. 2012. 228 p.

12. *Vechtomov E. M., Petrov A. A. Polukol'ca s idempotentnym umnozheniem : monografiya* [Semirings with idempotent multiplication : monograph]. Kirov. Raduga-PRESS. 2015. 144 p.

13. *Vechtomov E. M., Sidorov V. V. Abstraktnaya algebra. Bazovyj kurs : uchebnoe posobie* [Abstract algebra. Basic course : textbook]. Kirov. Raduga-PRESS. 2014. 260 p.

14. *Vechtomov E. M., Chermnyh V. V. Izuchenie algebraicheskoj struktury* [The study of algebraic structure] // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta* – Herald of Vyatka State Humanitarian University. 2012. No. 1 (3). Pp. 41–48.

15. *Gretzer G. Obshchaya teoriya reshetok : per. s angl.* [General theory of lattices : transl. from English]. M. Mir (World). 1982. 456 p.

16. *Kaluzhnin L. A. Vvedenie v obshchuyu algebru* [Introduction to general algebra]. M. Nauka (Sience). 1973. 448 p.

17. *Lambek I. Kol'ca i moduli : per. s angl.* [Rings and modules : transl. from English]. M. Mir (World). 1971. 280 p.

18. *Skornyakov L. A. Elementy teorii struktur* [Elements of the theory of structures]. 2nd publ. M. Nauka (Science). 1982. 160 p.

19. *Skornyakov L. A. Elementy algebry* [Elements of algebra]. 2nd publ. M. Nauka (Science). 1986. 240 p.

20. *Skornyakov L. A. Elementy obshchej algebry* [Elements of general algebra]. M. Nauka (Sceince). 1983. 272 p.

21. *Engelking R. Obshchaya topologiya : per. s angl.* [General topology : transl. from English]. M. Mir (World). 1986. 752 p.

22. *Golan J. S.* Semirings and their Applications. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1999. 382 p.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 51-73 DOI 10.25730/VSU.0536.21.022

Математическое моделирование магнитных потоков в электромеханических системах с постоянным потокосцеплением

С. Н. Запольских
кандидат технических наук, доцент кафедры инженерной физики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0001-5042-6403. E-mail: zapose8@yandex.ru

Аннотация. Известно, что электромеханические системы, работающие в режиме с постоянным потокосцеплением, имеют более высокие энергетические показатели, и поэтому необходимо проводить изучение и исследование таких систем. Рассматривается преобразование накопленной магнитной энергии в работу электромагнитной силы на модели катушки в виде тора с магнитным сердечником и не магнитным зазором при постоянном потокосцеплении. Такая система взята в качестве «исходной», и полученные результаты могут быть распространены и на другие электромеханические системы, которые могут иметь практическое применение. Кроме того, она конструктивно выполнима и математические соотношения могут быть экспериментально проверены. Выделен контур с основным магнитным потоком, проходящим по магнитному сердечнику и рабочему зазору. И выделен контур с неосновным магнитным потоком, проходящим за пределами основного контура и имеющего постоянное магнитное сопротивление. Было показано, что при постоянном потокосцеплении магнитная энергия может передаваться из неосновного магнитного контура в основной магнитный контур и преобразовываться в работу электромагнитной силы. За счет этого снижается вредное влияние неосновных магнитных потоков на уменьшение энергетических показателей.

Ключевые слова: математическое и физическое моделирование, накопители магнитной энергии, преобразование магнитной энергии, системы с постоянным потокосцеплением, энергетические характеристики.

Электромеханические системы электромагнитного типа имеют большие магнитные потоки рассеяния. Эти неосновные магнитные потоки проходят за пределами основного, рабочего магнитного потока, что приводит к снижению энергетических характеристик в традиционных электромагнитных системах. Известно, что электромеханические системы, работающие в режиме с постоянным потокосцеплением, имеют более высокие энергетические показатели [4]. Исследования электромагнитных двигателей на математических и численных моделях показывают, что при постоянном потокосцеплении магнитная энергия неосновных магнитных потоков в конце такта работы уменьшается почти до нуля. Это дает основание предположить, что при постоянном потокосцеплении энергия неосновных магнитных потоков преобразуется тоже в работу электромагнитной силы. Это может являться одной из причин повышения энергетических показателей. Целью работы является разработка физической и математической модели магнитных потоков для электромеханических систем с постоянным потокосцеплением и исследование влияние неосновных магнитных потоков на энергетические характеристики.

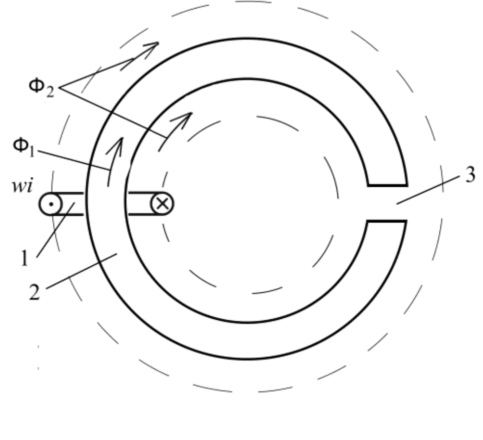


Рис. Электромагнитная система: 1 – катушка; 2 –сердечник; 3 – немагнитный зазор.

Рассматривается преобразование накопленной магнитной энергии в работу электромагнитной силы при постоянном потокосцеплении на модели катушки с магнитодвижущей силой $wi(t)$, выполненной в виде тора с сердечником из магнитного материала с немагнитным зазором (см. Рис.). Магнитный поток Φ_1, проходящий по сердечнику и немагнитному зазору, основному магнитному контуру, является основным. Магнитный поток, проходящий за пределами магнитного материала и немагнитного зазора, по неосновному магнитному контуру, является неосновным магнитным потоком Φ_2. Магнитное сопротивление основного магнитного потока изменяется длиной немагнитного зазора, магнитное сопротивление неосновного магнитного потока остается постоянным.

Электрическими и магнитными потерями пренебрегается, а относительная магнитная проницаемость сердечника считается достаточно большой. Рассматривается электромеханическая система, работающая в режиме двигателя, в которой накопление магнитной энергии уже осуществилось, источник питания отключен и происходит преобразование накопленной магнитной энергии в работу электромагнитной силы. Процессы, происходящие в такой системе, могут быть описаны уравнениями:

$$\frac{d\left(\Phi_1(t)+\Phi_2(t)\right)}{dt}=0, \tag{1}$$

$$R_{M1}(t)\Phi_1(t)=wi(t), \tag{2}$$

$$R_{M2}\Phi_2(t)=wi(t), \tag{3}$$

где $R_{M1}(t)$ и R_{M2} – магнитные сопротивления основного и неосновного магнитного потока.

Такие допущения и использование модели тора позволяют получить результаты в аналитическом виде и показать главные физические закономерности. Потери энергии, как электрические, так и магнитные, и другие интересующие характеристики могут быть получены с помощью компьютерных математических пакетов программ, которые могут решать дифференциальные уравнения в численном виде и с помощью которых можно разрабатывать численные модели [3].

Из уравнения (1) следует, что

$$\Phi_1(t)+\Phi_2(t)=\Phi_0=const, \tag{4}$$

$$d\Phi_2(t)=-d\Phi_1(t). \tag{5}$$

Из (2) и (3) следует:

$$R_{M1}(t)\Phi_1(t)=R_{M2}\Phi_2(t). \tag{6}$$

Подставляя из (4) $\Phi_2(t)$ в (6), получим:

$$\left(R_{M1}(t)+R_{M2}\right)\Phi_1(t)=R_{M2}\Phi_0=const. \tag{7}$$

Из этого уравнения следует, что когда $R_{M1}(t)\to 0$, то $\Phi_1(t)\to\Phi_0$, а согласно (6) $\Phi_2(t)\to 0$.

То есть, при уменьшении магнитного сопротивления основного магнитного контура, основной магнитный поток возрастает, а неосновной магнитный поток убывает и стремится к нулю. Происходит, таким образом, увеличение магнитного потока в основном магнитном контуре за счет уменьшения магнитного потока в неосновном магнитном контуре.

Из (3) и (4) следует, что

$$\Phi_2(t)=\frac{w}{R_{M2}}i(t)=\frac{1}{w}L_2 i(t), \tag{8}$$

$$\Phi_1(t)=\Phi_0-\frac{w}{R_{M2}}i(t), \tag{9}$$

где $L_2=\dfrac{w^2}{R_{M2}}$ – индуктивность обмотки для неосновного магнитного потока. Оказалось более удобным вместо индуктивностей использовать магнитные сопротивления.

Умножив (1) на $i(t)dt$, получим уравнение баланса энергии:

$$wi(t)d\Phi_1(t)+wi(t)d\Phi_2(t)=0. \tag{10}$$

Подставив (2) и (3) в уравнение (10), получим уравнение баланса энергии в виде:

$$R_{M1}(t)\Phi_1(t)d\Phi_1(t)+R_{M2}\Phi_2(t)d\Phi_2(t)=0. \tag{11}$$

Первое слагаемое является накопленной магнитной энергией основного магнитного потока и работой электромагнитной силы в основном магнитном контуре. Второе слагаемое является магнитной энергией неосновного магнитного потока. Так как магнитное сопротивление неосновного магнитного контура не меняется, то работа электромагнитной силы в этом контуре не производится. При уменьшении магнитного сопротивления основного магнитного контура магнитный поток в неосновном магнитном контуре уменьшается, и как было показано в (7) стремится к нулю, при этом, магнитная энергия в этом контуре тоже уменьшается и стремится тоже к нулю (11). Это указывает на то, что магнитная энергия неосновного магнитного потока передастся в основной магнитный контур. Рассмотрим это более подробно. Выражение (10) можно записать:

$$wi(t)d\Phi_1(t)+wi(t)d\Phi_2(t)=dW_{M1}(t)+\delta A_1(t)+dW_{M2}(t)+\delta A_2(t)=0. \tag{12}$$

В этом выражении, с учетом известных формул для магнитных энергий и работы электромагнитной силы, например [3]:

$$dW_{M1}(t)=\frac{1}{2}wi(t)d\Phi_1(t)+\frac{1}{2}w\Phi_1(t)di(t) \tag{13}$$

– магнитная энергия основного магнитного потока;

$$\delta A_1(t)=\frac{1}{2}wi(t)d\Phi_1(t)-\frac{1}{2}w\Phi_1(t)di(t) \tag{14}$$

– работа электромагнитной силы в основном магнитном контуре;

$$dW_{M2}(t)=\frac{1}{2}wi(t)d\Phi_2(t)+\frac{1}{2}w\Phi_2(t)di(t) \tag{15}$$

– магнитная энергия неосновного магнитного потока;

$$\delta A_2(t)=\frac{1}{2}wi(t)d\Phi_2(t)-\frac{1}{2}w\Phi_2(t)di(t) \tag{16}$$

– работа электромагнитной силы в неосновном магнитном контуре.

Подставляя (8) в (16), получим, как и следовало ожидать, что работа электромагнитной силы в неосновном магнитном контуре равна нулю:

$$\delta A_2(t)=0. \tag{17}$$

Вычислим работу электромагнитной силы в основном магнитном контуре. Для этого подставляя

$$\Phi_1(t)=\Phi_0-\frac{w}{R_{M2}}i(t) \text{ и } d\Phi_1(t)=-\frac{w}{R_{M2}}di(t)$$

в (14), получим:

$$\delta A_1=-\frac{1}{2}w\Phi_0 di(t). \tag{18}$$

Израсходованная магнитная энергия основного и неосновного магнитного контура равна:

$$dW_1(t)+dW_2(t)=$$
$$=\frac{1}{2}wi(t)d\Phi_1(t)+\frac{1}{2}w\Phi_1(t)di(t)+\frac{1}{2}wi(t)d\Phi_2(t)+\frac{1}{2}w\Phi_2(t)di(t). \tag{19}$$

Подставляя в это выражение $d\Phi_2(t)=-d\Phi_1(t)$ и $\Phi_1(t)+\Phi_2(t)=\Phi_0$, получим

$$dW_1(t)+dW_2(t)=\frac{1}{2}w\Phi_0 di(t). \tag{20}$$

Таким образом, в работу электромагнитной силы преобразуется накопленная магнитная энергия, как основного магнитного потока, так и накопленная магнитная энергия неосновного магнитного потока.

Сравним магнитную энергию основного и неосновного магнитного потока. Для этого выражения для магнитных энергий (13) и (15) с учетом (2) и (3) представим в виде:

$$dW_{M1}(t)=\frac{1}{2}d\left(R_{M1}(t)\Phi_1^2(t)\right) \text{ и } dW_{M2}(t)=\frac{1}{2}d\left(R_{M2}\Phi_2^2(t)\right). \tag{21}$$

В процессе накопления магнитной энергии, например, с помощью прямоугольного импульса напряжения, в момент времени $t=0$, магнитная энергия которого равна $W_{M1}=W_{M2}=0$. Если импульс напряжения достаточно короткий, то вторичная часть не успевает сильно сместиться, и можно считать, что во время накопления магнитной энергии магнитные сопротивления остаются постоянными. Интегрируя выражения (21) с учетом этого получим известные формулы для накопленных магнитных энергий в конце импульса напряжения:

$$W_{M1}=\frac{1}{2}R_{M1}\Phi_1^2 \text{ и } W_{M2}=\frac{1}{2}R_{M2}\Phi_2^2, \tag{22}$$

где R_{M1} – магнитное сопротивление основного магнитного контура во время подачи импульса напряжения.

Из этих формул с учетом (2) и (3) следует, что отношение накопленных энергий можно записать:

$$\frac{W_{M2}}{W_{M1}}=\frac{R_{M1}}{R_{M2}}=\frac{l_1S_2}{l_2S_1}, \tag{23}$$

где l_1 и l_2 – длина немагнитного рабочего зазора и средняя длина катушки; S_1 и S_2 – площадь магнитного сердечника и средняя площадь витков обмотки. В этом выражении также использовались известные формулы для магнитных сопротивлений:

$$R_{M1} = \frac{l_1}{\mu_0 S_1},\; R_{M2} = \frac{l_2}{\mu_0 S_2}, \tag{24}$$

Для размеров $l_1 = 5 \cdot 10^{-3}\,ì$, $l_2 = 400 \cdot 10^{-3}\,ì$, $S_1 = 15 \cdot 10^{-6}\,ì^{2}$ и $S_2 = 60 \cdot 10^{-6}\,ì^{2}$ отношение магнитной энергии не основного магнитного потока к магнитной энергии основного магнитного потока рассматриваемой системы, составляет 5 %.

Исследования на численной модели почти таких же размеров, представляющую собой систему из зубчатой первичной части с обмоткой и вторичной зубчатой части без обмотки с коэффициентом модуляции магнитного сопротивления 20, показали, что это отношение получается более 25 % [1–2]. Как показывают предварительные исследования для численной модели с коэффициентом модуляции магнитного сопротивления 4, обычные электромагниты, отношение магнитных энергий доходит до 50 %. В численных моделях в неосновной магнитный поток также входили боковые магнитные потоки. В первом приближении магнитные сопротивления этих потоков при перемещении вторичной части остаются тоже неизменными [3]. Существуют электромагнитные системы, в которых неосновные магнитные потоки получаются значительно больше.

Процесс передачи магнитной энергии из одного магнитного контура в другой похож на передачу энергии в обычном электрическом трансформаторе от источника электрического тока, расположенном в одном электрическом контуре, нагрузке расположенной в другом электрическом контуре. В рассматриваемой работе два магнитных контура связаны одним электрическим контуром, а в обычном трансформаторе два электрических контура связаны одним магнитным контуром. Эти два типа передачи энергии происходят и в обычной электромагнитной волне.

Рассматривался режим работы электрического двигателя. Электрические машины обратимы, поэтому аналогичные результаты должны получиться и для генератора. Уравнения, описывающие преобразование накопленной магнитной энергии в механическую энергию для электрического двигателя и уравнения, описывающие накопление магнитной энергии с помощью механической энергии для генератора, совпадают (1–3).

Таким образом, разработана физическая и математическая модель, с помощью которой было показано, что магнитная энергия в электромеханических системах с постоянным потокосцеплением накапливается также и в неосновных магнитных контурах и передается в основной магнитный контур, в котором происходит ее преобразование в работу электромагнитной силы. Это позволяет получить более высокие энергетические показатели электромеханических преобразователей энергии с постоянным потокосцеплением.

Список литературы

1. *Запольских С. Н., Борисов А. А., Бобров А. С.* Физические принципы преобразования энергий в электромагнитных системах с предварительным накоплением магнитной энергии // Advanced science, 2017. № 1. Физико-математические науки.

2. *Запольских С. Н., Борисов А. А., Хлебов А. Г.* Исследование энергетических характеристик электромагнитных систем с предварительным накоплением магнитной энергии на численных моделях // Advanced science, 2017. № 2. Физико-математические науки.

3. *Запольских С. Н.* Импульсные системы с индуктивными накопителями энергии. Киров : ПРИП ФГБОУ ВПО «ВятГУ», 2012, 121 с.

4. *Ряшенцев Н. П., Ряшенцев А. Н.* Электромагнитный привод линейных машин. Новосибирск : Наука, 1985. 153 с.

Mathematical modeling of magnetic fluxes in electromechanical systems with constant flow coupling

S. N. Zapolskikh

PhD in Technical Sciences, associate professor of the Department of Engineering Physics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0001-5042-6403. E-mail: zapose8@yandex.ru

Abstract. It is known that electromechanical systems operating in the mode with constant flow coupling have higher energy indicators, and therefore it is necessary to study and study such systems. The transformation of the accumulated magnetic energy into the work of the electromagnetic force on the model of a coil in the form of a torus with a magnetic core and a non-magnetic gap with constant flux coupling is considered. Such a system is taken as a "starting point", and the results obtained can be extended to other electromechanical systems that may have practical applications. In addition, it is structurally feasible and mathematical relations can be experimentally verified. A contour with the main magnetic flux passing through the magnetic core and the working gap is highlighted. And a contour with a non-main magnetic flux passing outside the main contour and having a constant magnetic resistance is highlighted. It has been shown that with constant flux coupling, magnetic energy can be transferred from the non-main magnetic circuit to the main magnetic circuit and converted into the work of electromagnetic force. Due to this, the harmful effect of non-basic magnetic fluxes on the reduction of energy indicators is reduced.

Keywords: mathematical and physical modeling, magnetic energy storage, magnetic energy conversion, systems with constant flow coupling, energy characteristics.

References

1. *Zapol'skih S. N., Borisov A. A., Bobrov A. S. Fizicheskie principy preobrazovaniya energij v elektromagnitnyh sistemah s predvaritel'nym nakopleniem magnitnoj energii* [Physical principles of energy conversion in electromagnetic systems with preliminary accumulation of magnetic energy] // Advanced science. 2017. No. 1. Physics and mathematical sciences.

2. *Zapol'skih S. N., Borisov A. A., Hlebov A. G. Issledovanie energeticheskih harakteristik elektromagnitnyh sistem s predvaritel'nym nakopleniem magnitnoj energii na chislennyh modelyah* [Investigation of energy characteristics of electromagnetic systems with preliminary accumulation of magnetic energy on numerical models] // Advanced science. 2017. No. 2. Physical and mathematical sciences.

3. *Zapol'skih S. N. Impul'snye sistemy s induktivnymi nakopitelyami energii* [Pulse systems with inductive energy storage]. Kirov. Federal state budgetary educational institution of higher professional education. "VyatSU". 2012. 121 p.

4. *Ryashencev N. P., Ryashencev A. N. Elektromagnitnyj privod linejnyh mashin* [Electromagnetic drive of linear machines]. Novosibirsk. Nauka (Science). 1985. 153 p.

УДК 371.3:51 DOI 10.25730/VSU.0536.21.023

Об опыте дистанционного обучения математике учеников 5–6 классов

В. И. Варанкина[1], О. А. Канаева[2]

[1]кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: veravarankina@gmail.com

[2]магистрант кафедры фундаментальной математики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: olenka-vorobeva-1997@mail.ru

Аннотация. В 2020 г. школы Росси были переведены на дистанционное обучение. В статье рассмотрены вопросы организации дистанционного обучения математике учеников 5–6 классов. Раскрыты особенности и трудности онлайн-обучения детей 10–12 лет. Приведены примеры электронных ресурсов, которые могут применяться для дистанционного обучения математике. Подведены итоги первого опыта работы учителя математики с детьми младшего подросткового возраста при переходе школ на дистанционное обучение. Указаны новые возможности и новые технологии обучения, возникшие в этот период.

Ключевые слова: обучение математике учеников 5–6 классов, дистанционное обучение.

В России датой официального развития дистанционного образования можно считать 30 мая 1997 года, когда вышел приказ № 1050 Минобразования России, позволяющий проводить эксперимент в сфере дистанционного образования.

А. В. Хуторский определяет дистанционное обучение как обучение, при котором удаленные друг от друга субъекты обучения осуществляют образовательный процесс с помощью средств телекоммуникаций [1].

По мнению А. М. Бершадского и И. Г. Кревского дистанционное обучение – это метод, который может использоваться как в рамках новой формы получения образования, так и в рамках традиционных форм – очной и заочной, а также при обучении, не имеющем целью получение систематического образования [2].

На первых порах дистанционное обучение применялось лишь в высших учебных заведениях, как еще одна из возможных форм, в последнее время дистанционные образовательные технологии начали активно внедряться и в общеобразовательных учебных заведениях. И этому есть объективные причины.

Весной 2020 года в мире началась пандемия COVID-19. В связи с введением ограничительных мер и режима самоизоляции, школы России были вынуждены перейти на дистанционные формы обучения. В марте 2020 г. Министерство просвещения Российской Федерации разработало и направило в регионы методические рекомендации по организации дистанционного обучения [3]. Методические рекомендации описывают примерные модели реализации образовательных программ, особенности проведения учебной и производственной практик в дистанционном формате. Школам, гимназиям и лицеям рекомендуется проводить учебные занятия, консультации, вебинары на школьном портале или другой платформе с использованием различных электронных образовательных ресурсов. Педагогам методические рекомендации были призваны помочь организовать и выстроить дистанционные уроки. В приложении к рекомендациям приводится пример организации урока в режиме видеоконференции с использованием платформы «Скайп» [3].

При переходе на преподавание предметов в режиме онлайн для всех учителей острой стала задача по организации своей работы так, чтобы в сжатые сроки разработать новые методики, создать соответствующие требованиям условия и комфортную атмосферу для дистанционного обучения школьников. Учителя во многих регионах начали активно использовать всевозможные образовательные ресурсы:

1) Moodle;
2) Google Classroom;
3) Edmodo;

4) Skype;

5) Zoom;

6) Mind;

7) Google Hangouts;

8) Учи.ру;

9) Ё-Стади;

10) Якласс;

11) Фоксворд;

12) РЭШ;

13) Liveworksheets;

14) Skymart.

Эти платформы в настоящее время используются для организации дистанционного обучения во многих учебных заведениях России для преподавания разных дисциплин. Для учеников 5–6 классов и по математике можно также предложить следующие ресурсы сети Интернет:

1. «Лучшее время» – конспекты и задания для 5–6 классов по математике.

2. «Лови ответ» – программа решает математические примеры и уравнения с отображением этапов решения, производит наглядно вычисления «в столбик».

3. «Вся элементарная математика» – уроки математики для средней школы.

4. «Math.ru» – сайт для школьников, студентов, учителей и для всех, кто интересуется математикой.

5. «Видеоуроки математики» – YouTube-канал уроков по математике.

6. «Оценок нет» – занятия по математике для учеников 3–8 классов.

7. «Отличник» – тренажёр для решения заданий по математике и русскому языку (1–7 класс).

8. «E-learning» – видеоуроки.

9. «Карантин ТВ» – YouTube-канал Skysmart с видеозаписями уроков по большинству школьных предметов.

10. «Математическая гимнастика» – задачи разных типов.

11. «LearningApps» – мультимедийные интерактивные упражнения.

12. «Сдам ГИА: Решу ВПР» – подготовка к всероссийским проверочным работам.

При работе с учениками 5–6 классов необходимо учитывать особенности этого возраста: активную подвижность, неусидчивость, утомляемость и невнимательность. Ученики еще не способны воспринимать и обрабатывать слишком большой объем информации. При этом детям в возрасте 10–12 лет свойственны такие качества как желание узнавать что-то новое, любознательность, склонность задавать вопросы. Но они не склонны теоретизировать, им больше нравятся активные занятия: игры, викторины, квесты и т. п. В то же время у детей младшего подросткового возраста начинает повышаться уровень учебно-познавательной и мыслительной деятельности, у них происходит первое знакомство с системой научных понятий, знаков, которые необходимы на уроках математики. Начинается переход от наглядно-образного к словесно-логическому мышлению [4].

При проведении уроков в онлайн-формате проявились также и организационные трудности, связанные с возрастом обучающихся:

1) незнание учениками того, как устроен Интернет, как вести себя в сети, как пользоваться Интернет-ресурсами, как защитить себя в сети;

2) отсутствие у детей опыта в дистанционном обучении;

3) несерьезное отношение к дистанционному обучению (не только учеников, но и родителей) – как к игре, чему-то необязательному;

4) высокая тревожность детей, связанная с их неумением работать в дистанционном формате;

5) неумение читать инструкции для выполнения заданий, отправка ими работ не в том формате;

6) несамостоятельность выполнения заданий;

7) неорганизованность детей младшего подросткового возраста: выполнение заданий при отсутствии контроля может растягиваться у них на весь день.

Рассмотрим результаты и выводы, полученные из практического опыта одного из авторов статьи О. А. Канаевой, учителя математики МКОУ гимназия г. Вятские Поляны дистанционного преподавания математики в 5–6 классах в периоды с 16 марта по 30 мая и с 1 сентября по 22 ноября 2020 года.

Для преподавания математики в 5–6 классах в гимназии были разработаны разные формы дистанционного взаимодействия с учениками. Обязательными для всех учеников стали онлайн-уроки на платформе Zoom. Для организации самостоятельной работы использовалась платформа Google Classroom, где выкладывался теоретический материал и рабочие листы, в конструкторе Liveworksheets создавались интерактивные рабочие листы (интерактивные тетради).

Проводились онлайн-уроки следующих типов:

- урок открытия новых знаний;
- обретения новых умений и навыков;
- урок рефлексии;
- урок комплексного применения знаний;
- урок обобщения и систематизации знаний;
- урок развивающего контроля, оценки и коррекции знаний.

При работе в онлайн-режиме у учителя возникает необходимость организовывать деятельность учеников так, чтобы интерес учащихся не снижался, и активность была стабильно высокой на протяжении всего урока. Для этого нужны новые методические приемы, опирающиеся на IT-технологии, которые бы активизировали школьников, стимулировали их к самостоятельному приобретению знаний. Для этого использовались викторины при закреплении и проверке знаний, конкурсы при повторении и актуализации знаний, дидактические игры при систематизации знаний и приложения на мобильных телефонах.

Нужно учитывать, что время перед экраном для школьника не должно превышать установленное санитарными требованиями: время синхронного общения учителя и учеников не может быть долгим. При реализации образовательных программ с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий на уроках математики применялось несколько форм организации образовательного процесса.

1. Учитель – в классе, ученики – дома.

Техническое обеспечение учителя: компьютер/мобильный телефон/планшет, камера, микрофон, колонки, интерактивная (обычная ученическая) доска.

Техническое обеспечение ученика: компьютер/планшет, микрофон, колонки.

Для обучающихся урок проходит за компьютером или персональным устройством. Для учеников 5–6 классов урок начинается с объяснения темы, разбора примеров и задач, затем обучающиеся самостоятельно выполняют тренировочные упражнения и отправляют свои ответы на проверку.

Важно понимать, какое и какого качества изображение видят школьники. Даже самая хорошая камера полноценно не передает записи учителя на доске. Эффективнее проводить урок в режиме демонстрации экрана. В данном случае при проведении уроков математики использовалась Smart доска.

2. Учитель – дома, обучающиеся – дома.

Техническое обеспечение учителя: компьютер/телефон/планшет, камера, микрофон, колонки.

Техническое обеспечение ученика: компьютер/планшет, микрофон, колонки.

Учитель проводит урок, находясь дома: объясняет тему, задает вопросы, комментирует параграф учебника. После объяснения материала учитель предлагает школьникам выполнить задания из учебника, решить уравнения, прочесть параграф. Доской при проведении урока служит встроенная в платформу Zoom электронная доска.

К каждому уроку, независимо от его типа и темы, разрабатывалась презентация в программе Microsoft PowerPoint. В презентацию обязательно был включен опорный конспект, возможные иллюстрации, примеры решения задач, тесты для контроля знаний, викторины и видеофрагменты в зависимости от типа урока. Особое внимание уделялось ведению записей. При изложении материала учителю необходимо продумывать какие пояснения он будет делать на доске. На платформе Zoom есть возможность писать комментарии к презентации или просто делать записи на электронной доске. Учеников 5–6 классов привлекает возможность что-то нарисовать или написать на данной доске, поэтому комментарии к заданиям давались не только учителем, но и учащимися: дети помечали знаками вопроса что-то непонятное в изложенном материале или решении задачи; решали задания на «доске»; исправляли ошибки друг друга.

Поведение учеников на дистанционном уроке осуществлялось по строгим правилам: заходить под своим именем, выключать микрофон, когда говорит учитель или кто-то из одноклассников, не вести в чате личную переписку, не писать на доске без разрешения, отвечать на вопросы только при поднятой руке.

Следующей платформой для взаимодействия с учениками 5–6 классов стал сервер Google Classroom. Организация образовательного процесса включала в себя размещение теоретической информации для школьников, удобной формой общения для этого были оповещения. Так же использовалась стена, на которую размещались объявления, прикреплялись документы, где существовала обратная связь в случае возникновения вопросов по общей теме, добавлялись всевозможные аудио, видео, образцы выполнения заданий, презентации, фото, текстовые документ, интерактивные рабочие листы (тетради), а также размещались инструкции для выполнения заданий и сроках их выполнения. Очень удобно, что оповещения о появлении новой информации приходят на почту учеников. На данной платформе создана система накопления оценок и ее разные модификации: общий журнал, журнал отметок по отдельно заданиям, по ученикам, с указанием кто задолжал, кто сдал вовремя, а кто с опозданием.

Таким образом, у учеников проявлялась заинтересованность в учебном процессе, возникала деловая-партнерская коммуникация с учителем при помощи личных и групповых комментариев, что немаловажно для учеников 5–6 классов.

Для каждого дистанционного урока математики создавались рабочие листы: традиционной формы (с текстом заданий, которые необходимо решить в тетради), а также интерактивные рабочие листы. Интерактивные рабочие листы (интерактивные тетради), создавались в конструкторе Liveworksheets. Данный конструктор имеет множество инструментов для работы, разнообразные типы заданий и ответов, что оказывается интересным для учеников 10–12 лет.

При проверке заданий в формате традиционного рабочего листа возникали проблемы, связанные с технической оснащенностью учителей и учеников. Использовались всевозможные программные средства для редактирования фотографий, pdf-документов, текстовых документов. Самыми удобными программными средствами для проверки работ служат Paint, встроенный редактор фотографий, Foxit Reader (работа с pdf-документами): достаточно открыть работу ученика и добавить комментарии или исправления с помощью имеющихся инструментов.

В период дистанционного обучения математике с 16 марта по 30 мая 2020 года в 5 класса были пройдены следующие темы:

Таблица 1

Темы, 5 класс

№	Раздел	Тема	Количество уроков
1	Десятичные дроби. Сложение и вычитание.	Десятичная запись дробных чисел	4
		Сравнение десятичных дробей	3
		Сложение и вычитание десятичных дробей	6
		Приближенные значения чисел. Округление чисел	3
2	Умножение и деление десятичных дробей.	Умножение десятичных дробей на натуральные числа	4
		Деление десятичных дробей на натуральные числа	5
		Умножение десятичных дробей	5
		Деление десятичных дробей	4
		Деление на десятичную дробь	3
		Среднее арифметическое	2
3	Проценты.	Понятие процента	3
		Нахождение процента от числа	4
		Нахождение числа по его проценту	4
4	Инструменты для вычислений.	Угол. Прямой и развернутый угол. Чертежный треугольник.	4
		Измерение углов. Транспортир	3
		Круговые диаграммы	3
5	Итоговое повторение		17

Количество пройденных разделов – 5, количество тем – 16, количество проведенных уроков – 77, из них 4 тематические контрольные работы и 1 итоговая контрольная за курс 5 класса.

В этот же период по математике в 6 классе были изучены темы:

Таблица 2

Темы, 6 класс

№	Раздел	Тема	Количество уроков
1	Положительные и отрицательные числа.	Сложение отрицательных чисел	3
		Сложение чисел с разными знаками	3
		Умножение отрицательных чисел	2
		Умножение чисел с разными знаками	3
		Деление отрицательных чисел	2
		Деление чисел с разными знаками	3

Окончание табл. 2

№	Раздел	Тема	Количество уроков
2	Рациональные числа.	Рациональные числа	2
		Свойства действий с рациональными числами	3
3	Раскрытие скобок.	Раскрытие скобок	5
		Коэффициент	3
		Подобные слагаемые	5
4	Решение уравнений.	Решение уравнений	8
5	Координатная плоскость.	Перпендикулярные прямые. Построение перпендикуляра к прямой с помощью угольника и линейки	3
		Параллельные и пересекающиеся прямые	3
		Координатная плоскость. Декартовы координаты на плоскости	5
		Столбчатые диаграммы	2
		Графики	5
6	Итоговое повторение		10

Количество пройденных разделов – 6, количество тем – 17, количество проведенных уроков – 77 из них 5 тематических контрольных работ и 1 итоговая контрольная за курс 6 класса.

В период дистанционного обучения с 1 сентября по 22 ноября 2020 года в 5 классе количество пройденных разделов – 4, количество тем – 14, количество проведенных уроков – 64, из них 4 контрольные работы.

Период дистанционного обучения показал, что у него есть значительные риски.

1. Технические: отсутствие Интернета, плохая связь, отключение света, плохая слышимость, подвисание сервисов.

2. Организационные. Сложно контролировать вовлеченность детей в учебный процесс. От учеников требуется высокий уровень сознательности, самостоятельности, самоконтроля и самодисциплины.

3. Социальные. В неблагополучных семьях у детей нет условий для дистанционного обучения. Часты случаи уклонения учеников из таких семей от участия в уроках.

Для создания необходимого информационного пространства с родителями каждого класса в мессенджере WhatsApp созданы беседы.

В связи с переходом на дистанционное обучение всероссийские проверочные работы весной не проводились, а были перенесены на осень, когда и определялся уровень общеобразовательной подготовки за 2020–2021 год, включающий в себя период дистанционного обучения математике. Представим результаты всероссийской проверочной работы (ВПР):

Таблица 3

Результаты ВПР

Класс	Количество				% успеваемости	% качества
	«5»	«4»	«3»	«2»		
5 «а»	4	10	12	4	87	47
6 «а»	3	10	9	3	88	52
6 «г»	2	9	9	3	87	48

По результатам всероссийской проверочной работы можно сделать вывод, что обучающиеся в целом справились с предложенной работой и показали базовый уровень достижения предметных результатов. Есть задания, которые требуют доработки в устранении недочетов.

Подводя итог, стоит отметить, что дистанционное обучение, как один из современных видов обучения, имеет полное право на существование в системе образования наравне с традиционными формами обучения. Но оно не должно их заменять, а может лишь дополнять и обогащать.

Эффективность применения дистанционных форм обучения на уроках математики заключается в следующем:

– использование Интернет-ресурсов повышает информационную культуру учащихся;
– появляется возможность использовать больше информации на уроках;
– обеспечивается оперативность пополнения учебного материала новыми сведениями;
– обеспечивается объективность и независимость оценки результатов деятельности ученика;
– повышается мотивация учащихся к обучению.

Однако недостатки чересчур активного и безосновательного внедрения дистанционных форм обучения также очевидны.

Список литературы

1. *Бершадский А. М., Белов А. А., Вергазов Р. И., Кревский И. Г.* Актуальные проблемы контроля знаний // Вестник компьютерных и информационных технологий № 1, 2013. С. 40–48.
2. *Выготский Л. С.* Мышление и речь. М. : Лабиринт, 1996. 414 с.
3. Методические рекомендации по реализации программ начального общего, основного общего, среднего общего, среднего профессионального образования и дополнительных общеобразовательных программ с использованием электронного обучения и дистанционных образовательных технологий. Банк документов. URL: https://edu.gov.ru (дата обращения: 9.12.2021).
4. *Хуторской А. В.* Эвристическое обучение. М. : МПА, 2008. 266 с.

About the experience of distance learning in mathematics for students of 5–6 grades

V. I. Varankina[1], O. A. Kanaeva[2]

[1]PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: veravarankina@gmail.com
[2]master student of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: olenka-vorobeva-1997@mail.ru

Abstract. In 2020 Russian schools were transferred to distance learning. The article deals with the organization of distance learning in mathematics for students of grades 5–6. The features and difficulties of online education for children aged 10–12 are revealed. Examples of electronic resources that can be used for distance learning in mathematics are given. The results of the first experience of a mathematics teacher working with children of younger adolescence during the transition of schools to distance learning are summarized. New opportunities and new learning technologies that emerged during this period are indicated.

Keywords: teaching mathematics to students of grades 5–6, distance learning.

References

1. *Bershadskij A. M., Belov A. A., Vergazov R. I., Krevskij I. G. Aktual'nye problemy kontrolya znanij* [Actual problems of knowledge control] // *Vestnik komp'yuternyh i informacionnyh tekhnologij* – Herald of computer and information technologies]. No. 1. 2013. Pp. 40–48.
2. *Vygotskij L. S. Myshlenie i rech'* [Thinking and speech]. M. Labyrinth. 1996. 414 p.
3. *Metodicheskie rekomendacii po realizacii programm nachal'nogo obshchego, osnovnogo obshchego, srednego obshchego, srednego professional'nogo obrazovaniya i dopolnitel'nyh obshcheobrazovatel'nyh programm s ispol'zovaniem elektronnogo obucheniya i distancionnyh obrazovatel'nyh tekhnologij. Bank dokumentov* – Methodological recommendations for the implementation of programs of primary general, basic general, secondary general, secondary vocational education and additional general education programs using e-learning and distance learning technologies. A bank of documents. Available at: https://edu.gov.ru (date accessed: 09.12.2021).
4. *Hutorskoj A. V. Evristicheskoe obuchenie* [Heuristic training]. M. MPA. 2008. 266 p.

УДК 371.27(470.342) DOI 10.25730/VSU.0536.21.024

Некоторые итоги Единого государственного экзамена по математике 2021 года (профильный уровень) в Кировской области

Н. А. Зеленина[1], М. В. Крутихина[2]

[1]кандидат педагогических наук, доцент кафедры фундаментальной математики,
Вятский государственный университет.
Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0003-4238-6282. E-mail: sezel@mail.ru

[2]кандидат педагогических наук, доцент кафедры фундаментальной математики,
Вятский государственный университет.
Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-3754-2781. E-mail: krumarvik@mail.ru

Аннотация. В предлагаемой статье рассмотрены некоторые итоги государственной итоговой аттестации по математике в 2021 году в форме единого государственного экзамена (ЕГЭ) профильного уровня. Авторы приводят данные о результатах сдачи экзамена выпускниками 11 классов Кировской области, об успешности решения задач контрольно-измерительных материалов, указывают типичные затруднения и ошибки участников ЕГЭ, основываясь на содержании экзаменационной работы и статистических данных. Приведенные в статье материалы могут быть полезны учителям математики, а также выпускникам, готовящимся к прохождению итоговой аттестации по математике в форме Единого государственного экзамена.

Ключевые слова: обучение математике, результаты Единого государственного экзамена по математике, типичные ошибки и затруднения участников экзамена.

Единый государственный экзамен (ЕГЭ) как форма итоговой аттестации выпускников по математике введен в Российской Федерации в 2008 году. За прошедшие четырнадцать лет отношение в обществе к этому экзамену сформировалось скорее негативное, нежели позитивное. В последние годы в средствах массовой информации появилось немало публикаций с требованием вернуться к традиционным формам аттестации. В качестве аргументов высказываются сомнения в объективной оценке знаний и умений учащихся, поскольку подготовка к экзамену заключается в «натаскивании» на решения довольно ограниченного круга заранее известных задач. Хотелось бы обратить внимание на тот факт, что подобные суждения характерны, в основном, для неспециалистов в области общего среднего образования. Напомним, что ЕГЭ вводился, прежде всего, с целью создания равных условий для учащихся из различных регионов для поступления в престижные и отдаленные вузы, а также уменьшения коррупционной составляющей при проведении выпускных экзаменов. Безусловно, ЕГЭ имеет определенные недостатки, однако названные выше свои функции он реализует. В то же время организаторы экзамена и составители контрольных измерительных материалов за прошедшие годы проделали большую работу по совершенствованию процесса аттестации. Напомним, что в течение последнего десятилетия из контрольно-измерительных материалов был исключен раздел, содержащий задания с выбором ответа. Экзамен разделен на два уровня – базовый и профильный, что сделано только для математики. Постепенно повышается минимальный порог набора баллов, необходимых для поступления в вуз. Весьма серьезные изменения ждут выпускников в 2022 году, о чем более подробно будет сказано ниже. Авторы представленных материалов имеют многолетний опыт работы по проверке задач с развернутым ответом на ЕГЭ. Наша практика работы в вузе показывает тесную связь количества набранных на ЕГЭ баллов и успешности обучения студента в университете.

Проведем анализ результатов ЕГЭ по математике за последние три года. Отметим, что условия для подготовки в этот период были весьма некомфортными. С 2019 года ученики могли выбрать для сдачи экзамена только один уровень – либо базовый, либо профильный. В 2020 году Единый государственный экзамен по математике проводился в связи с пандемией только на профильном уровне. В 2020 и 2021 годах выпускники готовились к экзамену в режиме дистанционного обучения, в 2020 году экзамен состоялся только в июле.

В Кировской области в 2021 году предмет «Математика» на профильном уровне сдавали 3076 (54,35 %) выпускников. Динамика числа участников экзамена по математике (профильный уровень) по региону приведена в Таблице 1.

Таблица 1

Количество участников ЕГЭ
по математике (профильный уровень) в Кировской области
в 2019–2021 гг. [9]

2019		2020		2021	
чел.	% от общего числа участников	чел.	% от общего числа выпускников	чел.	% от общего числа выпускников
3268	54,70	3127	59,07	3076	54,35

Подчеркнем еще раз, что в 2019 году ученики впервые могли выбрать для сдачи экзамена только один уровень. Результаты 2019 года показали, что профильный уровень вполне по силам многим учащимся, поэтому в 2020 году мы видим рост числа участников. Однако трудности, связанные, в том числе, и с пандемией, привели к тому, что число сдающих экзамен на профильном уровне в 2021 вновь уменьшилось почти на 5 %.

Таблица 2

Основные результаты ЕГЭ
по математике (профильный уровень) в Кировской области
в 2019–2021 гг. [9]

Показатели	2019 г.	2020 г.	2021 г.
Не преодолели минимальный порог, %	2,42	5,40	4,27
Средний тестовый балл	58,51	56,43	58,75
Получили от 81 до 99 баллов, %	7,56	5,56	10,06
Получили 100 баллов, чел.	6	10	5

Анализ Таблицы 2 показывает, что результаты 2021 года близки к результатам 2019 года. Исключение составляет категория школьников, получивших на экзамене от 81 до 99 баллов. В 2021 году процент таких учащихся существенно увеличился и достиг 10,06 %, что составляет десятую часть от всех принимавших участие в экзамене. Показатель 81–99 баллов характеризует высокий уровень подготовки школьников, что не может не радовать. Немного повысился и средний тестовый балл.

В целом, распределение участников ЕГЭ профильного уровня по диапазонам тестовых баллов в Кировской области в 2021 году имеет вид (Рисунок 1).

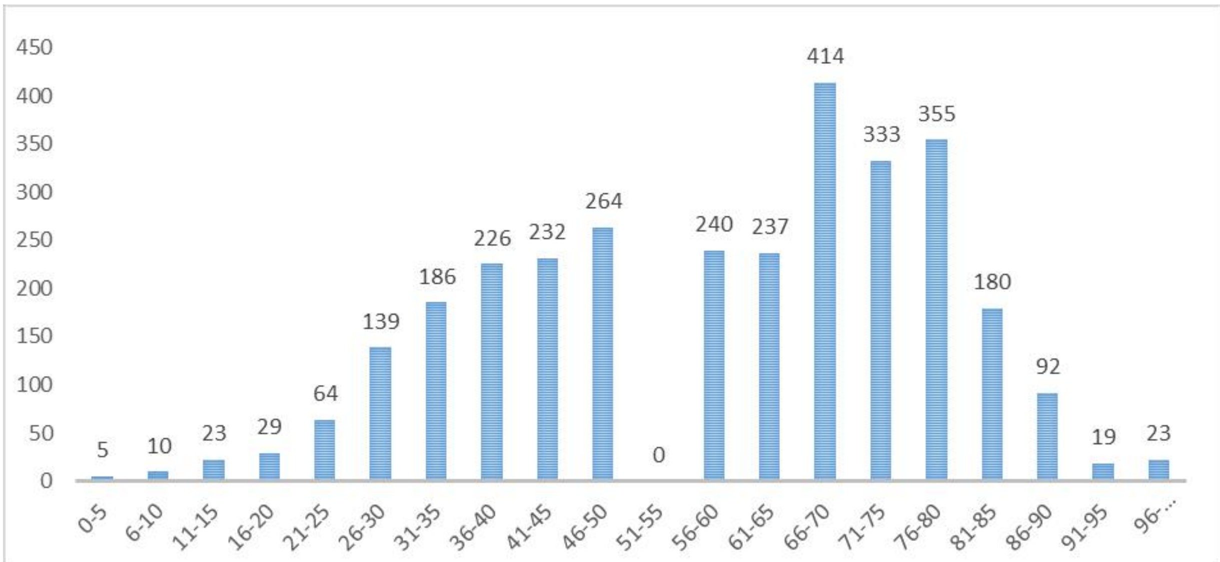


Рисунок 1. Диаграмма распределения участников ЕГЭ по математике (профильный уровень) по диапазонам тестовых баллов в 2021 г. [9]

Наибольшее количество выпускников региона – 414 (13,5 %) набрали количество баллов в диапазоне 66–70. Это говорит о том, что учащиеся справились практически со всеми заданиями части **B** и набрали 1–2 балла за выполнение заданий части **C**. Обнадеживающим является и факт, что следующим по величине показателем является 355 участников (11,6 %), набравших от 76 до 80 баллов, то есть решивших не менее двух задач повышенного уровня сложности части **C**.

Таблица 3

**Доля участников ЕГЭ,
получивших положительный результат
за решение задач 1–5, в 2019–2021 гг., %** [8, 10]

№ задачи	1		2		3		4		5	
	Киров. обл.	РФ	Киров. обл.	РФ	Киров. обл.	РФ	Киров. обл.	РФ	Киров. обл.	РФ
2021 г.	96,7	96,0	94,8	96,9	93,7	91,9	96,55	92,9	97,2	95,0
2020 г.	92,4	88,9	99,8	98,4	94,2	89,8	86,7	89,9	98,6	96,1
2019 г.	96,4	95,5	96,2	95,5	93	93,3	94,8	95	94,4	93,6

Аналогично 2020 году высокие показатели успешности были зафиксированы при решении участниками ЕГЭ по математике в Кировской области первых пяти задач. Все результаты выше 93,5 % и выше средних по России (кроме задачи № 2).

Таблица 4

**Доля участников ЕГЭ,
получивших положительный результат за решение задач 6–12 части В
в 2019–2021 гг., %** [8, 10]

№ задачи	6		7		8		9	
	Киров. обл.	РФ	Киров. обл.	РФ	Киров. обл.	РФ	Киров. обл.	РФ
2021 г.	65,1	70,6	67,4	58,8	61,6	66,3	78,6	68,8
2020 г.	74,9	76,8	69,1	63,0	73,2	63,8	70,2	65,2
2019 г.	81,8	80,6	58	61,5	62,7	66,7	67,2	74,8

№ задачи	10		11		12	
	Киров. обл.	РФ	Киров. обл.	РФ	Киров. обл.	РФ
2021 г.	89,6	78,3	68,6	53,8	57,1	55,5
2020 г.	81,3	75,7	41,3	57,0	50,4	47,9
2019 г.	94,5	86,9	79,3	72,7	67,4	60,8

Анализ Таблицы 4 показывает существенное снижение решаемости геометрических задач № 6 и № 8.

Задача 6. Острый угол B прямоугольного треугольника ABC равен 73°. Найдите угол между биссектрисой CD и медианой CM, проведенными из вершины прямого угла C. Ответ дайте в градусах [11].

В 2021 году задачу верно решили 65,1 %, в 2020 г. – 74,9 %, в 2019 г. – 81,8 % выпускников. Такой же спад результатов наблюдается и в целом по Российской Федерации.

Задача 8. Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объем шара равен 48. Найдите объем конуса [11].

В 2021 году с задачей справились 61,6 %, в 2020 г. – 73,2 %, в 2019 г. – 65,7 % сдававших. По сравнению с прошлым годом результат ухудшился более чем на 10 %. Мы связываем это с тем, что в задаче дана комбинация двух тел.

В то же время задачи № 7 и № 9 на преобразование выражений и применение производной школьники Кировской области решили лучше, чем в целом по России. Аналогично с задачами № 10–12 в 2121 году выпускники Кировской области справились успешнее, чем в прошлом году, причем различие по задаче № 11 более 27 %. Хотя весьма отрадно видеть улучшение ситуации по сюжетной задаче и задаче на применение производной, все-таки для стандартных задач, имеющих алгоритмы решения, показатели весьма низкие.

Задача 12. Найдите точку минимума функции $y = 3x - \ln(x-6)^3 + 9$ [4].

В 2020 году в задаче № 12 требовалось найти точку максимума, функция была аналогичная. Тем не менее, в 2021 году задачу решили всего 57,1 % выпускников, то есть чуть больше половины. Веер ответов содержит 31(!) значение. Учащиеся не различают точку минимума и минимум функции, получают для x отрицательные значения, что невозможно из-за области определения функции, делают самые разнообразные ошибки при нахождении производной.

Успешность решения задач части **С**, в целом, осталась на прошлогоднем уровне.

Таблица 5

Доля участников ЕГЭ, получивших максимальный балл за решение задач части С в 2019–2021 гг., % [8, 10]

№ задачи		**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**
Кол-во баллов		2	2	2	3	3	4	4
2021 г.	**Киров. обл.**	**41,9**	**5,1**	**29,0**	**2,7**	**22,9**	**1,9**	**14,3**
	РФ	36,1	7,2	22,3	3,5	19,0	2,0	11,4
2020 г.	**Киров. обл.**	**45,6**	**1,4**	**16,8**	**7,9**	**9,6**	**1,6**	**17,6**
	РФ	34,9	2,5	14,8	3,8	22,0	2,4	10,3
2019 г.	**Киров. обл.**	**51,1**	**8,0**	**22,4**	**2,8**	**12,4**	**4,9**	**2,6**
	РФ	45,3	5,6	22,4	2,7	15,4	4,2	3,2

Задача 13. а) Решите уравнение $4sin^3x + 4\sqrt{3}cos^2x + 3sinx = 4$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ [1].

По сравнению с 2020 годом результат оказался несколько ниже (2021 г. – 42,0 %, 2020 г. – 45,6 %), что мы связываем с более трудными преобразованиями для решения уравнения. Типичными, как обычно, являются ошибки при решении простейших тригонометрических уравнений, необоснованный отбор корней на промежутке (многие участники экзамена не считают нужным показывать на тригонометрической окружности точки, принадлежащие указанному в условии отрезку). Менее подготовленные выпускники проводят отбор корней арифметическим способом, придавая конкретные значения параметрам n и k в записи серий корней тригонометрического уравнения. Распространенной ошибкой при таком рассуждении является неполный перебор значений n и k, который не позволяет выставить за решение задачи полный балл.

Задача 14. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AD равна 10, высота SH равна 12. Точка K – середина бокового ребра SD. Плоскость AKB пересекает боковое ребро SC в точке P.

а) Докажите, что площадь четырехугольника $CDKP$ составляет $\frac{3}{4}$ площади треугольника SCD.

б) Найдите объем пирамиды $ACDKP$ [2].

Стереометрическая задача традиционно относится к наиболее плохо решаемым, причем подавляющее большинство выпускников даже не приступают к работе с ней. В 2020 году в первой части этой задачи требовалось доказать принадлежность трех точек одной плоскости, с чем справились 1,4 % сдававших. При этом нужно учитывать, что задача оценивается всего в 2 балла. В 2021 году успешность повысилась до 4,66 %, что тоже чуть выше только решаемости планиметрической задачи и задачи с параметром, хотя в 2019 году решаемость была 8 %. Составители контрольно-измерительных материалов считают, что основная проблема низких показателей – отсутствие сформированности «стандартных алгоритмов построения сечения, нахождения элементов призмы, пирамиды» [10, с. 14]. Мы считаем, что трудности в решении стереометрической задачи зависят практически всегда от той конфигурации, которая в ней задана. Поскольку в силу разных причин пространственные представления учащихся развиваются в школе очень слабо, ученики просто не видят на чертеже элементы, которые нужно найти или использовать. В частности, в представленной выше задаче искомый объем может быть найден как часть объема пирамиды $SABCD$, но основание пирамиды $ACDKP$ находится на боковой грани исходной пирамиды. В такой конфигурации учащимся трудно увидеть связь между высотами пирамид и использовать при решении результат первого пункта.

Задача 15. Решить неравенство $(4^x - 5 \cdot 2^x)^2 - 20(4^x - 5 \cdot 2^x) - 96 \leq 0$ [3].

По этой задаче успешность значительно возросла – 29,1 % в 2021 году по сравнению с 16,8 % в 2020 году, что неудивительно. Неравенство 2021 года сводится к целому, 2020 года – дробно-рациональному. Выводы очевидны. Самый распространенный способ решения неравенства – двукратная замена переменной. Несмотря на достаточно высокий результат по сравнению с предыдущими периодами, следует отметить, что большинство ошибок имеют логический характер. Решающие не могут выстроить логику рассуждений при переходе с одного этапа решения неравенства на другой, пытаются применить «всё и сразу», получая при этом неверные результаты даже на уровне решения квадратных неравенств. Думается, что высокую решаемость дал тип неравенства (возможность использовать для решения новую переменную). Однако требует серьезной работы осознание учащимися логики решения и осмысления отдельных его этапов.

Задача 16. Точки A, B, C, D и E лежат на окружности в указанном порядке, причем $AE = ED = CD$, а прямые AC и BE перпендикулярны. Отрезки AC и BD пересекаются в точке T.

а) Докажите, что прямая EC пересекает отрезок TD в его середине.

б) Найдите площадь треугольника ABT, если $BD = 6$, $AE = \sqrt{6}$ [4].

В 2019 году решаемость планиметрической задачи была 2,8 %, в 2020 – 7,9 %, в 2021 – 1,72 %. Выводы неутешительные – задачи по геометрии учащиеся решают все хуже и хуже. Хотя чертеж к планиметрической задаче сделать значительно проще, чем к стереометрической, даже этот первый шаг делают лишь единицы. На наш взгляд, выбранная для итоговой аттестации задача соответствует заявленному уровню сложности. Если доказать равенство отрезков в пункте а) можно, используя свойства равнобедренного треугольника и вписанных в окружность углов, то для вычисления площади треугольника ABT необходимо провести достаточно длинную цепочку рассуждений, включающую применение элементов тригонометрии. Из приступивших к решению пункт а) выполнили более 50 % учеников. Низкий процент решаемости в целом по задаче получился еще и по той причине, что не все шаги в пункте б) были обоснованы, что не позволило выставить за задачу высший балл.

Задача 17. В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 300 тыс. рублей на 6 лет. Условия его возврата таковы:

– в январе 2026, 2027 и 2028 годов долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

– в январе 2029, 2030 и 2031 годов долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

– к июлю 2031 года кредит должен быть полностью погашен.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 498 тысяч рублей. Найдите r [5].

Успешность в решении экономической задачи приблизительно на 10 % выше результатов прошлого года, что говорит и о хорошем выборе сюжета, и о том, что выпускники лучше научились выражать задолженность клиента перед банком в типичных ситуациях. Многие участники экзамена верно составили математическую модель описанной в задаче ситуации. Основными недостатками записанных решений были недостаточная обоснованность составленной модели и вычислительные ошибки.

Задачи 18. Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - a^2| = |x + a| \cdot \sqrt{x + a^2 - 2a}$$

имеет ровно два различных корня [6].

Результативность решения задачи с параметром по-прежнему не высока – 1,9 %, хотя (и это большая заслуга разработчиков содержания экзамена) задача составлена так, что достаточно просто решалась и аналитическим, и графическим способом. Отрадно, что учащиеся нашего региона на экзамене применяли оба названных выше типа рассуждений. Наиболее грубые ошибки – деление обеих частей уравнения на выражение $|x + a|$ и неумение решать уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$.

Задача 19. Отношение трехзначного числа к сумме его цифр – целое число.

а) Может ли это отношение быть равным 34?

б) Может ли это отношение быть равным 84?

в) Какое наименьшее значение может принимать это отношение, если первая цифра трехзначного числа равна 4? [7].

По сравнению с 2020 годом успешность решения задачи № 19 несколько понизилась – 14,3 % (2020 г. – 17,6 %), однако значительно выше всех предыдущих лет, что говорит, на наш взгляд, о верно выбранном направлении в определении уровня сложности последней задачи. Отдельно отметим, что ответ на пункт в) можно было получить, выполнив полный перебор трехзначных чисел, у которых первая цифра равна 4. Хотя таких чисел немало, но подсчет искомого отношения достаточно прост. Однако некоторые выпускники записали в решение не все числа с первой цифрой 4, указав лишь идею перебора и вывод, что не позволило поставить за задачу высший балл. Тем не менее, содержание задачи позволило приступить к выполнению этого задания различным категориям выпускников – участникам различного рода олимпиад, знающим методы решения, и обычным школьникам, которые пытались организовать перебор вариантов.

Таким образом, на наш взгляд, содержание вариантов контрольно-измерительных материалов 2021 года сбалансировано достаточно хорошо и лучше (чем, например, в 2020 году) соответствует количеству баллов, которыми оценивается решений каждой задачи части **С**. Количественный и качественный анализ показывают, что выпускники Кировской области вполне достойно прошли итоговое испытание по математике, хотя, безусловно, резервы для улучшения результатов есть и не малые.

В 2022 году в контрольно-измерительные материалы по математике профильного уровня внесены следующие изменения. Из части **В** исключены задания базового уровня 1, 2 и 3. Добавлены задания повышенного уровня 9 и 10, проверяющее соответственно умение выполнять действия с функциями, и моделировать реальные ситуации на языке теории вероятностей и статистики. Количество заданий уменьшилось с 19 до 18, максимальный первичный балл за выполнение всей работы стал равным 31 вместо 32. Изменена система оценивания стереометрической задачи №13 – максимальный первичный балл стал равен 3 вместо 2 и текстовой задачи № 15 – максимальный стал равен 2 вместо 3 [12]. Это следующий шаг на пути к дифференциации выпускников средних школ в процедуре государственной итоговой аттестации по математике.

Список литературы

1. Задания 13 ЕГЭ–2021 // URL: https://ege.sdamgia.ru/test?id=40353928.
2. Задания 14 ЕГЭ–2021 // URL: https://ege.sdamgia.ru/test?id=40353997.
3. Задания 15 ЕГЭ–2021 // URL: https://ege.sdamgia.ru/test?id=40354087.
4. Задания 16 ЕГЭ–2021 // URL: https://ege.sdamgia.ru/test?id=40354143.
5. Задания 17 ЕГЭ–2021 // URL: https://ege.sdamgia.ru/test?id=40354180.
6. Задания 18 ЕГЭ–2021 // URL: https://ege.sdamgia.ru/test?id=40354199.
7. Задания 19 ЕГЭ–2021 // URL: https://ege.sdamgia.ru/test?id=40354213.
8. *Зеленина Н. А., Носова Н. В.* Анализ результатов ЕГЭ по учебному предмету «Математика» // Единый государственный экзамен в Кировской области. Анализ результатов ЕГЭ–2020 : сборник информационно-аналитических и методических материалов / сост. Н. В. Носова, Авторский коллектив. Киров : КОГОАУ ДПО «ИРО Кировской области», 2020. С. 71–80.
9. Итоги ГИА 11 // URL: https://reports.43edu.ru/gia/s_scale.php.
10. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2021 года по математике // URL: https://fipi.ru/ege/analiticheskie-i-metodicheskie-materialy#!/tab/173737686-2.
11. Открытый банк заданий ЕГЭ / Математика. Профильный уровень // URL: https://fipi.ru/ege/otkrytyy-bank-zadaniy-ege#!/tab/173765699-2.
12. Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в 2022 году единого государственного экзамена по математике (профильный уровень) // URL: https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!/tab/151883967-2.

Some results of the Unified State Exam in Mathematics in 2021 (profile level) in the Kirov region

N. A. Zelenina[1], M. V. Krutihina[2]

[1] PhD in Pedagogical Sciences, associate professor of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0003-4238-6282. E-mail: sezel@mail.ru

[2] PhD in Pedagogical Sciences, associate professor of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-3754-2781. E-mail: krumarvik@mail.ru

Abstract. The proposed article discusses some of the results of the state final certification in mathematics in 2021 in the form of a unified state examination (USE) of the profile level. The authors provide data on the results of passing the exam by graduates of the 11th grades of the Kirov region, on the success of solving problems of control and measuring materials, indicate typical difficulties and mistakes of the USE participants, based on the content of the examination paper and statistical data. The materials given in the article can be useful for mathematics teachers, as well as graduates preparing for the final certification in mathematics in the form of a Unified state Exam.

Keywords: teaching mathematics, results of the Unified State Exam in Mathematics, typical mistakes and difficulties of exam participants.

References

1. *Zadaniya 13 EGE–2021* – Tasks 13 of the Unified State Exam-2021 // Available at: https://ege.sdamgia.ru/test?id=40353928.
2. *Zadaniya 14 EGE–2021* – Tasks 14 of the Unified State Exam-2021 // Available at: https://ege.sdamgia.ru/test?id=40353997.
3. *Zadaniya 15 EGE–2021* – Tasks 15 of the Unified State Exam-2021 // Available at: https://ege.sdamgia.ru/test?id=40354087.

4. *Zadaniya 16 EGE–2021* – Tasks 16 of the Unified State Exam-2021 // Available at: https://ege.sdamgia.ru/test?id=40354143.

5. *Zadaniya 17 EGE–2021* – Tasks 17 of the Unified State Exam-2021 // Available at: https://ege.sdamgia.ru/test?id=40354180.

6. *Zadaniya 18 EGE–2021* – Tasks 18 USE-2021 // Available at: https://ege.sdamgia.ru/test?id=40354199.

7. *Zadaniya 19 EGE–2021* – Tasks 19 of the Unified State Exam-2021 // Available at: https://ege.sdamgia.ru/test?id=40354213.

8. *Zelenina N. A., Nosova N. V. Analiz rezul'tatov EGE po uchebnomu predmetu "Matematika"* [Analysis of the results of the Unified State Exam in the academic subject "Mathematics"] // *Edinyj gosudarstvennyj ekzamen v Kirovskoj oblasti. Analiz rezul'tatov EGE–2020 : sbornik informacionno-analiticheskih i metodicheskih materialov* – Unified State exam in the Kirov region. Analysis of the results of the Unified State Exam-2020 : collection of information, analytical and methodological materials / comp. N. V. Nosova. Author's team. Kirov. Kirov Regional State Educational Autonomous Institution of professional additional education "IRO of the Kirov region". 2020. Pp. 71–80.

9. *Itogi GIA 11* – Results of GIA 11 // Available at: https://reports.43edu.ru/gia/s_scale.php.

10. *Metodicheskie rekomendacii dlya uchitelej, podgotovlennye na osnove analiza tipichnyh oshibok uchastnikov EGE 2021 goda po matematike* – Methodological recommendations for teachers prepared on the basis of the analysis of typical mistakes of participants of the Unified State Exam 2021 in mathematics // Available at: https://fipi.ru/ege/analiticheskie-i-metodicheskie-materialy #!/tab/173737686-2.

11. *Otkrytyj bank zadanij EGE / Matematika. Profil'nyj uroven'* – Open bank of USE assignments / Mathematics. Profile level // Available at: https://fipi.ru/ege/otkrytyy-bank-zadaniy-ege #!/tab/173765699-2.

12. *Specifikaciya kontrol'nyh izmeritel'nyh materialov dlya provedeniya v 2022 godu edinogo gosudarstvennogo ekzamena po matematike (profil'nyj uroven')* – Specification of control measuring materials for the unified state exam in mathematics in 2022 (profile level) // Available at: https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!/tab/151883967-2.

УДК 004.738.1:[51+004] DOI 10.25730/VSU.0536.21.025

Разработка специализированных сайтов по математике и информатике

А. И. Дементьева[1], Е. Н. Лубягина[2], Д. В. Шабалин[3]

[1]студент, Вятский государственный университет. Россия, г Киров. E-mail: anuta29032000@mail.ru

[2]кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г Киров. ORCID: 0000-0001-5071-6208. E-mail: shishkina.en@mail.ru

[3]студент, Вятский государственный университет. Россия, г Киров. E-mail: dish431@gmail.com

Аннотация. В результате активной цифровизации основного и дополнительного образования накоплен огромный опыт разработки специализированных интернет-ресурсов и их применения при обучении таким областям знания, как математика, информатика, физика, химия и т. д. Однако для разработчика такого ресурса по-прежнему актуален вопрос выбора оптимального инструментария создания электронных учебных единиц и их гармоничной организации. Имеющиеся технологии позволяют создавать достаточно функциональные интерактивные элементы сайта в приемлемые сроки. Однако часто мощность таких элементов напрямую зависит материальных вложений, например, от затрат на выделенный сервер, обслуживание хостинга, услуги сервисов.

В данной статье предложены направления разработки составляющих сайта, специфичных для математики и информатики. Предложены удобные, по мнению авторов, программные инструменты, полезные в разработке тематического сайта.

Ключевые слова: сайт по математике, сайт по программированию, системы управления контентом, фреймворк, WordPress, QuickLaTeX, Ejudge, Django, GeoGebra, Скриншотер.

Одной из важнейших целей государства является повышение доступности качественного образования, удовлетворяющего потребностям современного общества. Для ее достижения действует Стратегия развития информационного общества в РФ [27]; на федеральном, ведомственном и региональном уровнях реализуются многочисленные проекты; создаются институты развития, финансируются частные инициативы, проводятся форумы, конференции. Еще в 2013 г. распоряжением Правительства РФ № 2506-р была утверждена Концепция развития математического образования в РФ [21], в которой в частности отмечена необходимость развития таких форм обучения, как получение образования в дистанционной форме, интерактивные музеи математики, математические проекты на интернет-порталах и т. д. Согласно ФГОС, с 2022 г. в учебном плане будут прописаны те цифровые ресурсы, которые (помимо очных занятий) могут быть использованы для освоения программы.

Данная статья имеет целью обратить внимание читателя на некоторые полезные возможности цифровых ресурсов, в ней предложен ряд технических решений в создании тематического сайта по математике и/или информатике.

Следует отметить, что несмотря на возможности имеющихся современных технологий, позволяющих создавать достаточно функциональные интерактивные элементы сайта в приемлемые сроки, часто мощность таких элементов напрямую зависит материальных вложений. Это, например, траты на выделенный сервер, обслуживание хостинга, услуги используемых сервисов.

Рассмотрим несколько интернет-ресурсов по математических и по информатике с точки зрения их технической организации.

1. Математические интернет-проекты

Среди сайтов, предлагающих свою уникальную предметную книжную базу, существенно выигрывают те, которые кроме расширенного поиска документа предоставляют возможность комфортного чтения и редактирования online. Для примера укажем сайт mathedu.ru проекта «Математическое образование» [19], содержащий в открытом доступе электронную библиотеку по математике и вопросам ее преподавания. Ресурс имеет максимально понятный и удобный интерфейс (Рис. 1).

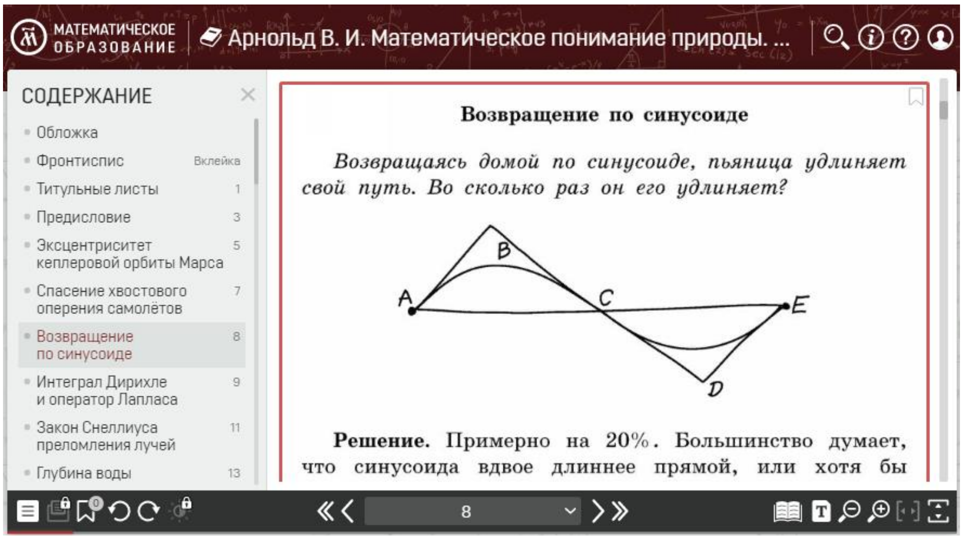


Рис. 1. Организация работы с книгой на сайте https://www.mathedu.ru

Так же укажем сайты Фонда «Математические этюды»: mathesis.ru (содержит раритетные книги Одесское издательство «Mathesis») и vofem.ru (электронная версия первого в России физико-математического научно-популярного журнала «Вестник опытной физики и элементарной математики») – здесь функционал просмотра документов меньше, но скорее этого и не требуется ([2], [3]).

Перейдем к сайтам, на которых реализована работа с базой математических задач. В этой категории выделим сайт zadachi.mccme.ru информационно-поисковой системы «Задачи по геометрии» Р. К. Гордина [4]. На данный момент система содержит 9295 задач по планиметрии и 3178 задач по стереометрии, снабжённых ответами, указаниями, решениями и различного рода атрибутами для тематического поиска и прослеживания взаимосвязей (Рис. 2).

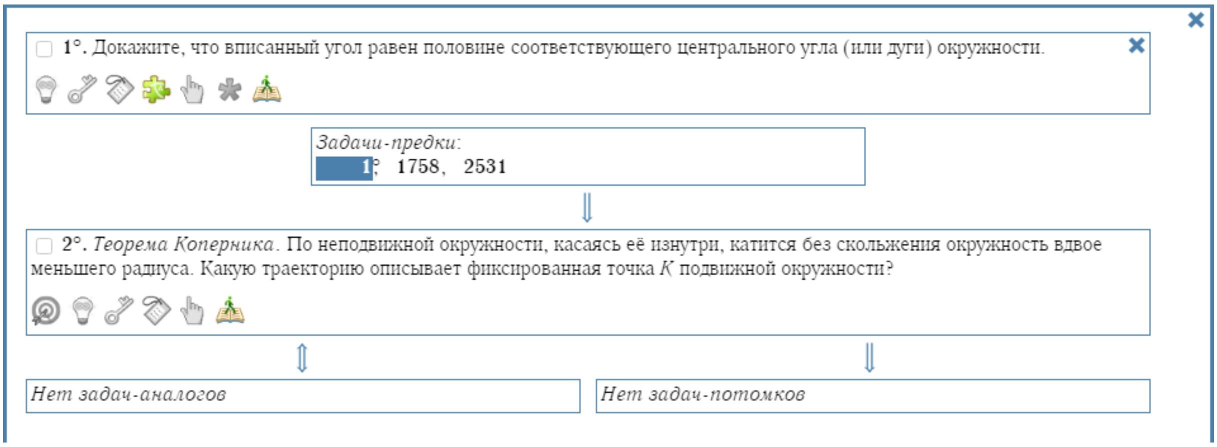


Рис. 2. Автоматический поиск связанных задач на zadachi.mccme.ru

Существенно меньше возможностей имеет сайт problems.ru интернет-проекта МЦНМО «Задачи», предназначенный для работы с задачами и поиска похожих примеров [6]. Не нужен расширенный функционал и сайту projecteuler.net «Проект Эйлера», содержащему уникальную серию сложных задач математического/компьютерного программирования, для решения которых потребуется нечто большее, чем просто математическое понимание, а для большинства проблем – использование компьютера [20].

При анализе функционала сайта обратим внимание на его математическую верстку – размещение на страницах формул, чертежей, полей ввода/вывода, гармонично сочетающихся с текстом.

Для примера возьмем сайт elementy.ru научно-популярного проекта «Элементы большой науки» рассказывающего о фактах фундаментальной науки [13]. На его страницах присутствуют latex-формулы, специализированные чертежи и анимация (см., например, веб-страницу [1]).

Более разносторонним будет наполнение сайта etudes.ru «Математические этюды», на котором можно найти много новых знаний и информации для дальнейших размышлений [29]. Здесь можно встретить 2D анимацию (Рис. 3), иллюстрирующую небольшие математические сюжеты (миниатюры) [15].

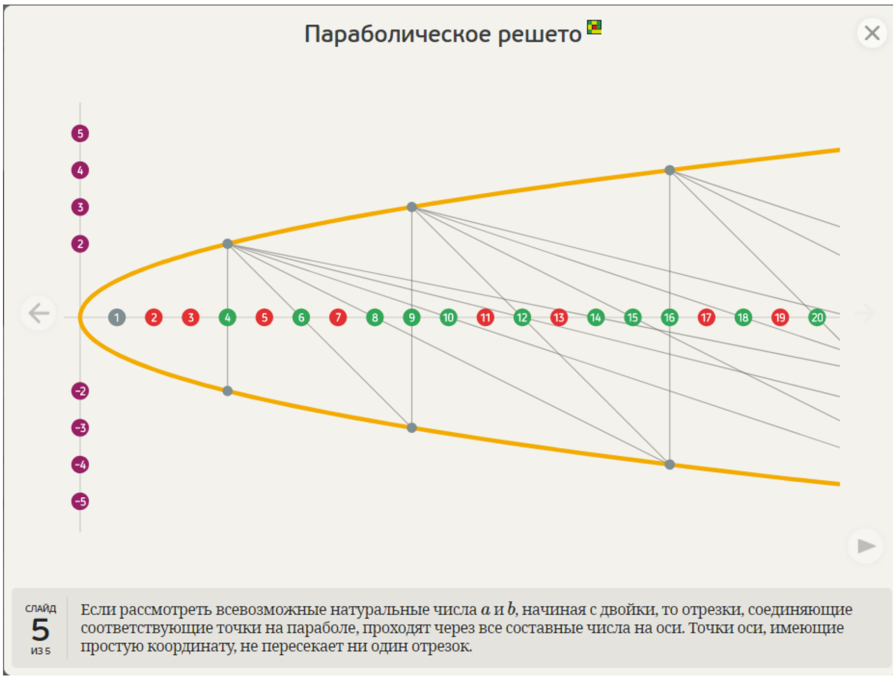


Рис. 3. Кадр анимации на etudes.ru

Создатели математических этюдов используют 3d анимацию не только для иллюстрации материала, но и, например, для пояснения принципов создания материальных 3d моделей [23].

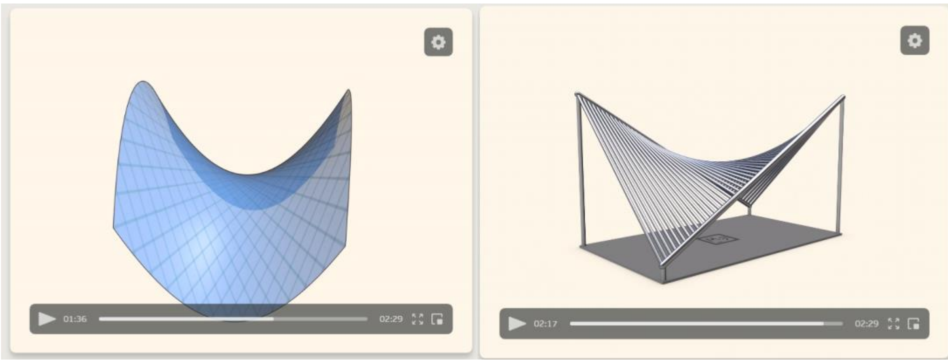


Рис. 4. Видео с графической и физической моделью параболоида на etudes.ru

Кроме того, на рассматриваемом сайте реализована возможность вращения чертежа (Рис. 5), что помогает лучше понять строение математического объекта [14].

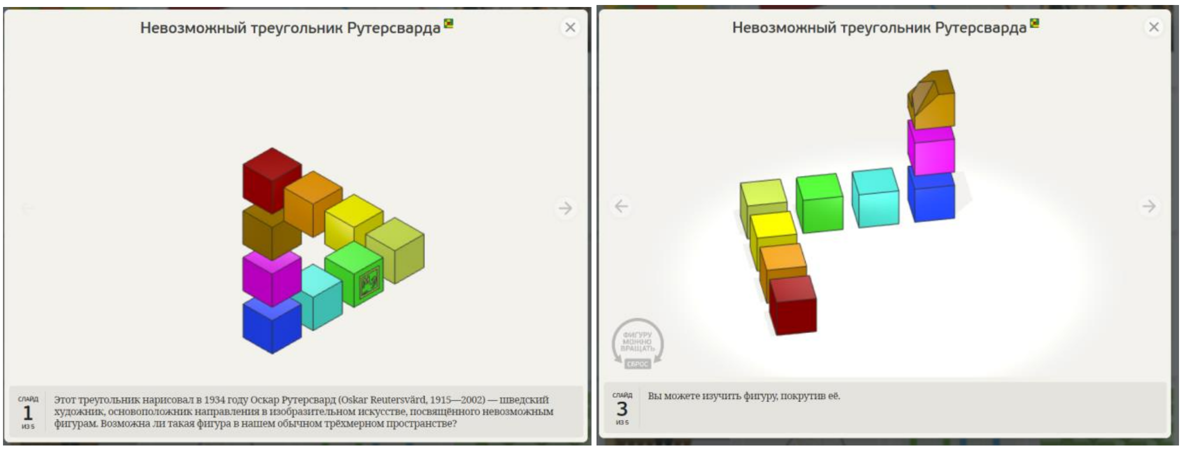


Рис. 5. Реализация вращения фигуры на etudes.ru

Отдельно отметим разработанные командой математических этюдов приложения для iPhone и iPad [42]: В уме, Арифметические ребусы, Четыре краски, Пифагор HD и т. п.

В качестве следующей функции математического ресурса отметим возможность online-решения типовых задач. На сайте МатБюро [8] имеется подборка таких сервисов. Лидером этого направления считаем сайт-сервис wolframalpha.com [57], на котором организовано решение задач по математике, физике, химии, географии, информатике и т. д. (рис. 7).

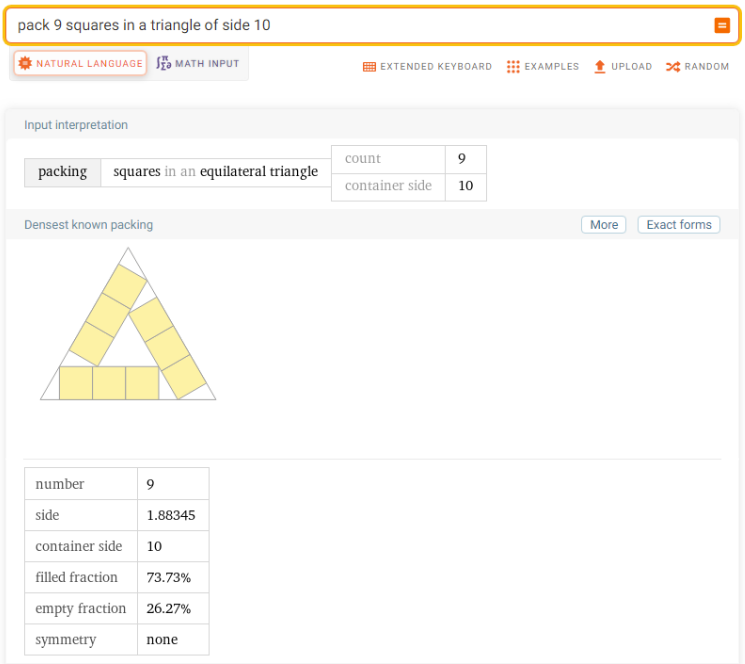


Рис. 7. Отчет по предложенной задаче на wolframalpha.com

Возможность обратной связи (обработки и анализа данных, вводимых пользователем) является ключевой для сайтов-курсов, сайтов-соревнований. В этой категории выделим сайт metaschool.ru, организующий кружки, олимпиады (реализованы в форме тестов разных типов), предоставляющий сервис математических online-игр (быки и коровы, ним, война вирусов, т. п.), тренажеры (устный счет) [11]. Приложение сайта шахматы-онлайн позволяют играть через интернет с живыми соперниками, тренироваться на шахматных роботах и участвовать в турнирах. Разработанные на сайте приложения оптимально соответствуют своей обучающей цели (Рис. 8).

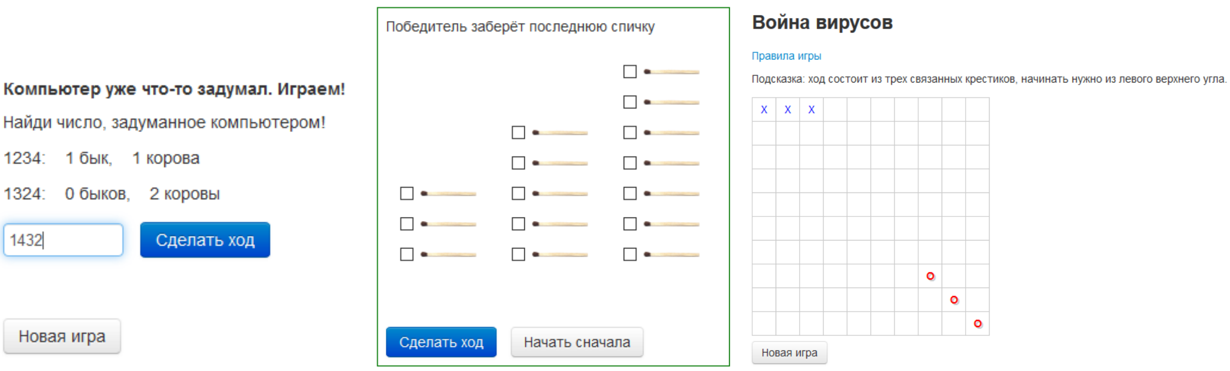


Рис. 8. Примеры реализации математических игр на metaschool.ru

Из сайтов, активно использующих работу с графикой, отметим платформу uchi.ru [28], представляющую математику в анимированных красочных роликах, ориентированную, по нашему мнению, на слабых школьников.

2. Интернет-проекты по информатике

Не менее, чем математические, популярны турниры по информатике/программированию.

Начнем с сайта azspcs.com соревнований Эла Циммермана по решению вычислительно сложных задач на исследование и оптимизацию [33]. Здесь не требуется писать/высылать программу – пользователь отправляет только ответы (в оговоренной форме), чем дальше он продвинется в решении (решение зависит от величины параметра n), тем выше будет в турнирной таблице (Рис. 9).

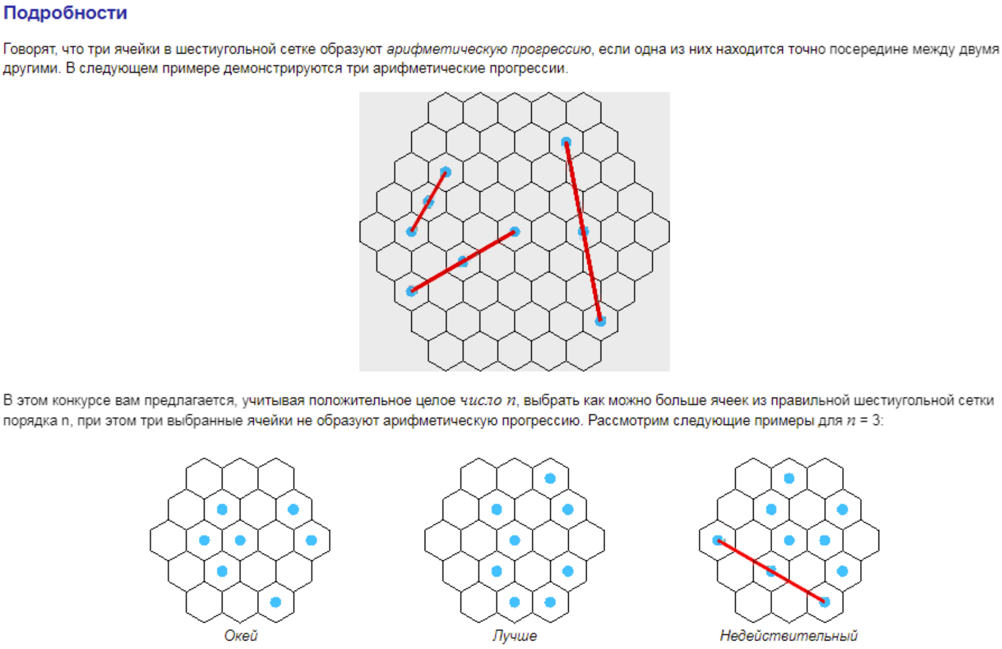


Рис. 9. Пример конкурсного задания с параметром n на azspcs.com

Рассмотрим обучающие ресурсы с автоматической проверкой представленного пользователем программного кода, которая осуществляется сравниванием результатов работы программы с заранее указанными верными значениями тестовых данных.

Так обучающая платформа stepik.org [49] позволяет тестировать введенную программу для большинства популярных языков программирования в рамках учебного курса (Рис. 10).

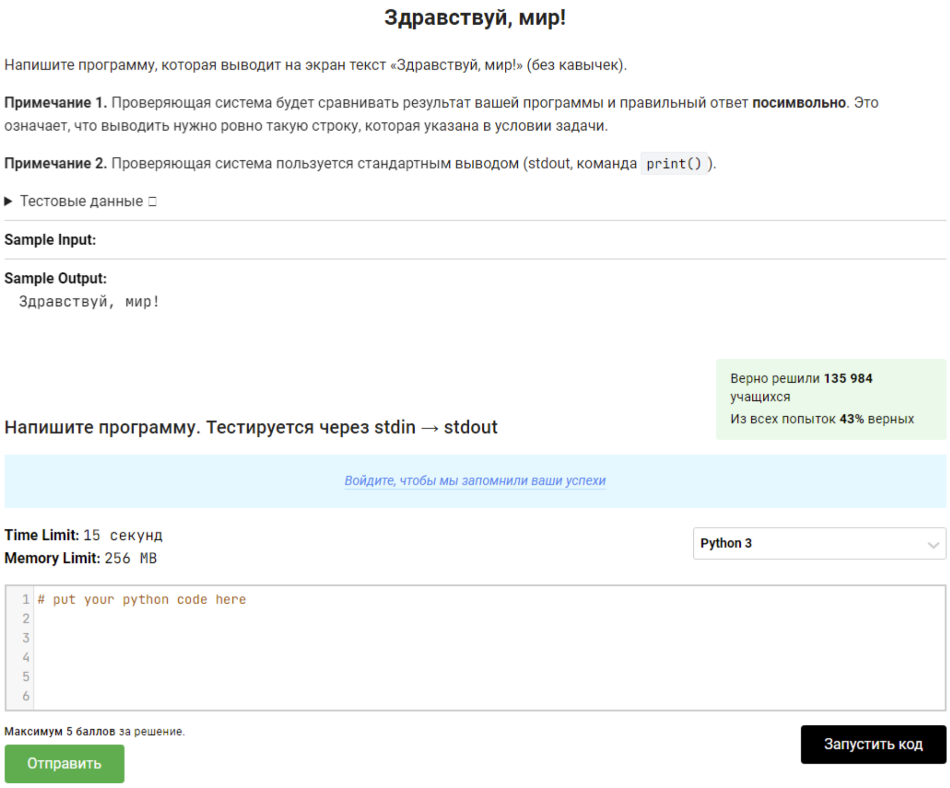


Рис. 10. Организация проверки кода на stepik.org

Автоматическую проверку кода можно подключить и к курсу, разработанному в Moodle. В качестве примеров приведем сайт school.sgu.ru [17] «Портал обучения информатике и программированию» (используется тестирующая система Contester, разработанная П. Комковым [37]) и informatics.mccme.ru [7] «Информатикс» от Московского центра непрерывного математического образования (используется тестирующая система ejudge [39], разработанная А. В. Черновым, а задачи на сайт добавляются при помощи системы Polygon, разработанной М. Мирзаяновым [46])

Аналогичная техника у платформы для проведения соревнований по спортивному программированию contest.yandex.ru [30], на ней дополнительно организован вывод турнирной таблицы и параметры попыток (Рис. 11).

Время посылки	ID	Задача	Компилятор	Вердикт	Тип посылки	Время	Память	Тест	Баллы	
10 окт 2021, 20:53:58	54317434	1	Python 3.9.1	OK	-	44ms	4.16Mb	-	-	отчёт

Рис. 11. Параметры попытки решения задачи на contest.yandex.ru

Схожий интерфейс имеют другие сайты-хранилища задач по программированию. На Рис 12. приведены фрагменты страниц сайтов крупнейшего в России архива acm.timus.ru (задачи соревнования Уральского федерального университета, Чемпионаты Урала, Уральские четвертьфиналы ICPC, Петрозаводские сборы по программированию) [52] и сайта acmp.ru проекта "Школа программиста"! для школьников Красноярского края [18].

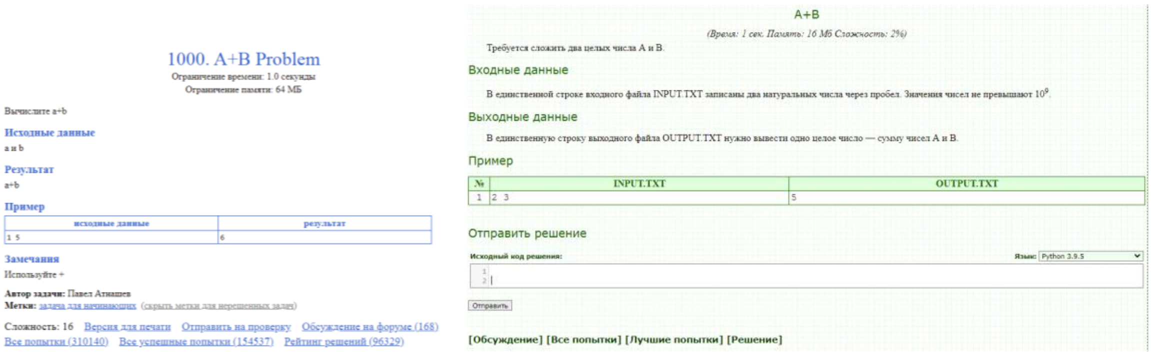


Рис. 12. Проверка кода на acm.timus.ru и на acmp.ru

Для справедливости отметим известную во всем мире платформу для проведения международных соревнований на алгоритмику codeforces.com [36] и ненамного отстающую по популярности от Codeforces американскую платформу topcoder.com [53], которая кроме алгоритмических заданий позволяет проводить соревнования по задачам на исследование, не имеющими единого верного алгоритма, но только ответ, подходящий больше или меньше.

Еще одной полезной функцией ресурса по программированию является наличие среды для online-работы с ноутбуками Jupyter. Такой является платформа kaggle.com, предлагающая задачи на исследование [44]. Для примера на Рис. 13 представлена организация страницы задачи анализа личности клиента для поиска идеальных клиентов компании.

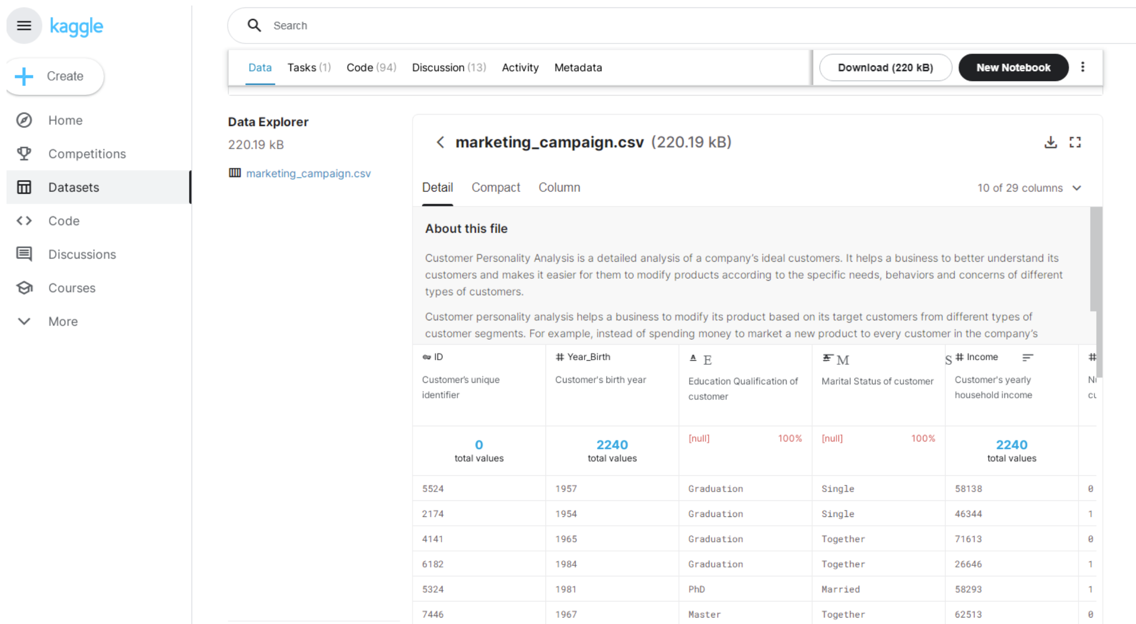


Рис. 13. Задачи на анализ данных на kaggle.com

Из сайтов с продвинутой графикой отметим сайт codecombat.com [35], представленный в виде детской игры, для прохождения которой требуется написать программу на выбранном языке программирования (Рис. 14).

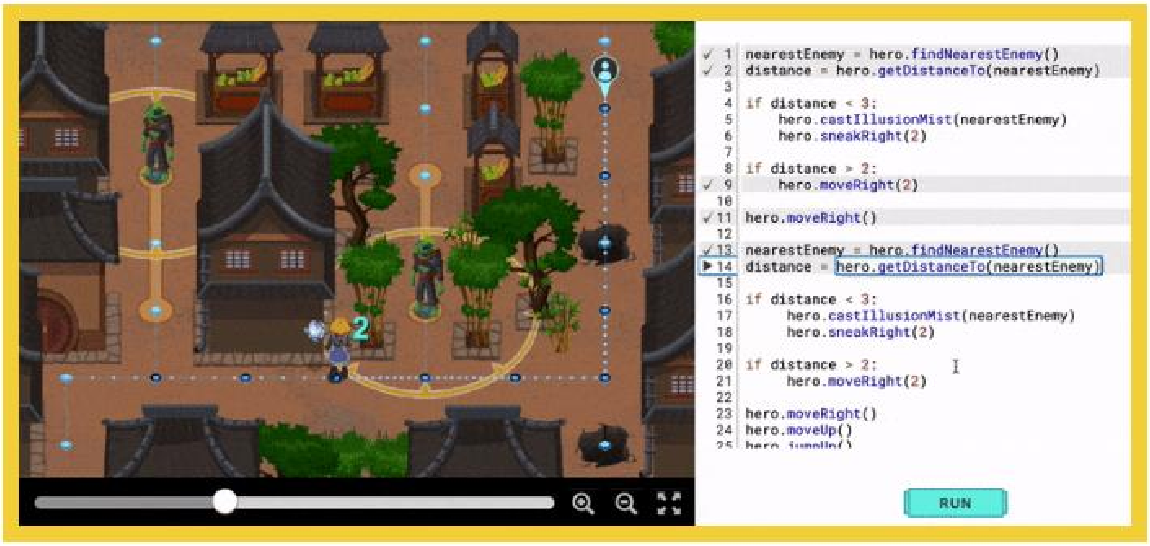


Рис. 14. Задача на codecombat.com

Поставим вопрос: какие из приведенных выше возможностей можно реализовать учителю/преподаватель (или просто любителю) математики/информатики, используя минимум знаний и вложений.

3. Пути создания специализированных элементов сайта по математике и/или информатике

Считаем, что для написания шаблонного учебного курса по математики либо информатике будет достаточно разместить на используемый веб-сервер или хостинг подходящую систему управления обучением (например, Moodle [45]) либо воспользоваться соответствующим интернет-сервисом (например, stepik).

Под хостингом понимается услуга хостинг-провайдера по размещению сайта на сервере в Интернете круглосуточно, то есть это аренда веб-сервера для размещения на нем сайта. Кроме хостинга сайту требуется домен – это имя сайта в Интернете. Доменное имя, как и хостинг, можно получить у хостинг-провайдера. Есть организации, предоставляющие хостинг и домен бесплатно для образовательных целей.

Отметим, что для большей производительности Moodle между недорогим хостингом и сервером лучше выбрать сервер. То же можно сказать про тестирующие системы для проведения соревнований по программированию (например, ejudge).

В случае, когда стоит задача создания сайта с индивидуальными параметрами, для написания кода вручную от начала и до конца во многих случаях потребуются годы. Поэтому программисты и верстальщики используют такие эффективные инструменты, как фреймворки и CMS.

Фреймворк («конструкция» или «структура») веб-приложения – это программная среда, своеобразный каркас для веб-проекта, она позволяет добавлять компоненты в зависимости от потребностей, упрощает веб-разработку: реализует маршрутизацию URL-адресов для обработчиков, взаимодействие с базами данных, поддержку сеансов и авторизацию пользователей и т. п. К фреймворкам относятся, например, Yii [56], Symphony[50], Django[38], Flask[41].

CMS (Content Management System) – системы управления контентом (содержимым) сайта, то есть программы, создающей сайт и позволяющей управлять им через админ-панель или консоль с удобным интерфейсом. Из систем управления контентом для нас предпочтительны те, которые написаны на скриптовом языке программирования PHP: его код выполняется на сервере, в отличие от языка разметки HTML, исполняемого браузером. Это позволяет создавать динамические (интерактивные) элементы: форумы, гостевые книги, формы взаимодействия с базами данных и тп. В качестве примеров популярных свободных систем управления сайтом выделим WordPress [22], Joomla [25], Drupal [24].

Итак, код созданный на фреймворках имеет больше возможностей, он хорошо защищен, не содержит излишних надстроек, значит, отличается высокой производительностью. Однако первое время может быть тяжело разобраться в коде, для разработки сайта и его последующего обслуживания потребуется больше времени по сравнению с CMS.

Самое главное достоинство использования CMS – это минимальное время, требующееся для создания сайта, интуитивно понятный интерфейс (не требующим знания языков программирования) и наличием множества готовых расширений. Однако возможности многих CMS ограничены наличием подходящего расширения. Производительность полученного сайта ожидаемо ниже, чем созданного в фреймворке, сайт требует больше ресурсов (хотя это не имеет значения при мощном серверном оборудовании).

Считаем, что для цели создания предметного сайта вполне подходит CMS WordPress. Она характеризуется простотой использования, большой скоростью и устойчивостью, является бесплатной для некоммерческого использования, использует PHP и поддерживает язык запросов SQL, который воспринимает любой браузер. По состоянию на июнь 2021 года WordPress обслуживает более 40 % из 10 миллионов лучших веб-сайтов. Подробнее о создании сайта с помощью WordPrecc можно посмотреть в издании соответствующей тематики [12].

Для решения специфических задач сайта (верстка формул, прорисовка качественных чертежей, анимации, внедрение тестов, обратной связи, подключение скриптов) достаточно использовать ряд плагинов WordPress. Плагин – это функциональные дополнения системы, их создано огромное количество: на 14.11.2021г существует 59 420 бесплатных плагинов и практически каждый день это число меняется. Рассмотрим некоторые из них.

Работу с документами (чтение, создание заметок) организует, например, плагин 3D FlipBook, который работает с изображениями, PDF-файлами или HTMLS в качестве листающей книги [31].

Для создания LaTeX-формул хорошо зарекомендовали себя:

1. Плагин Insert math (вставка формул) [43], подгружающий удобный визуальный редактор.
2. Плагин QuickLaTeX [47], позволяющий вставлять в текст страницы LaTeX-формулы и графику TikZ, используя собственный синтаксис LaTeX без специальных вложенных тегов для каждого уравнения. Кроме того он допускает пользовательской преамбуле LaTeX использовать дополнительные \usepackage{}и \newcommand{}.

Формулы и чертежи, полученные в QuickLaTeX, всегда четкие и не зависят от коэффициента масштабирования в браузере.

Для создания графики удобно использовать следующие инструменты, предоставляющие экспорт в TikZ:

– пакет динамической математики GeoGebra (понятна школьнику), которая объединила геометрию, алгебру и математическое исчисление [9];

– система Sketch для создания чертежей двух- или трехмерных твердых объектов и сцен [48];

– набор утилит ePiX для создания математически точных чертежей фигур, сюжетов и фильмов, способная отображать результаты сложных вычислений [40].

Просты в использовании плагин для добавления 3d-модели 3d-viewer (поддерживаемые форматы .glb, .gltf) [32] и плагин с возможностью ее поворота модели Vrm 360 3D Model Viewer (obj, stl, wrl, fbx) [55].

Для создания 3D-фигур подойдет любой пакет 3D-моделирования, к примеру Blender [34]. Существует немало соответствующих онлайн сервисов как, например, Tridiv [54].

Для создания обучающих видеороликов подойдет программа записи видео с экрана Скриншотер [26], лицензия которой подразумевает свободное использование.

Для реализации обратной связи, в том числе для создании тестов, будут полезны плагины Contact Form 7 [16] и Watu Quiz [56].

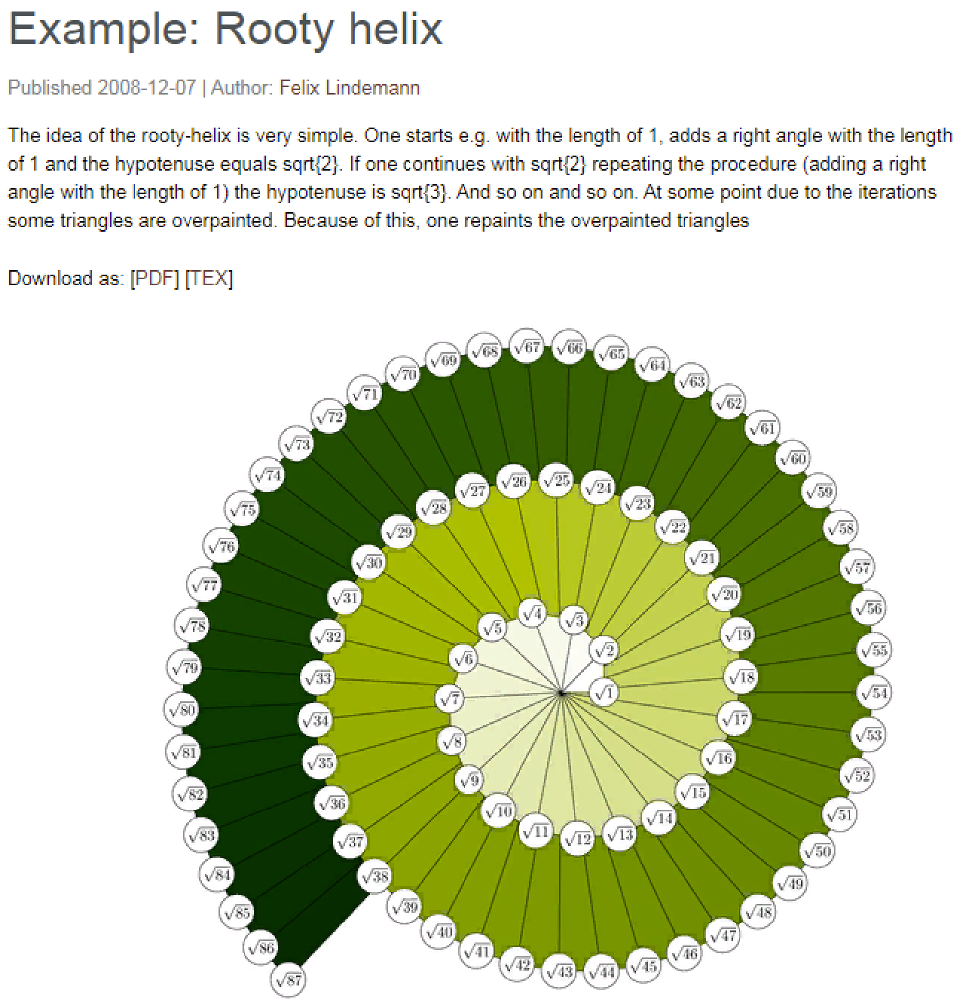
Для сайтов, требующих написания индивидуальных сценариев (в том числе тестирование кода, введенного пользователем) считаем целесообразным использовать Python-фреймворки. Так, например, в Python юнит-тесты, то есть скрипты для проверки правильности работы кода программы, могут быть созданы с помощью модуля PyTest.

Особо отметим Python-фреймворки Django и Flask.

В фреймворк Flask изначально заложен лишь самый необходимый функционал, который затем можно расширять до требуемого уровня. Поэтому свое ознакомление с Python-фреймворками полезно начать именно с него (подробнее см. в [5]).

Больше инструментов у Django (см. пособие [10]). Отметим, что для хостинга Джанго обычно требуется выделенный VPS/VDS-сервер, что существенно увеличивает стоимость хостинга.

Примером сайта, использующего Django является texample.net [51]. Сайт содержит базу сгенерированных чертежей, создает изображение по введенному LaTex-коду, сохраненные на сайте LaTex-чертежи (рис. 15) можно использовать для изменения, можно оставлять комментарии.


Example: Rooty helix

Published 2008-12-07 | Author: Felix Lindemann

The idea of the rooty-helix is very simple. One starts e.g. with the length of 1, adds a right angle with the length of 1 and the hypotenuse equals sqrt{2}. If one continues with sqrt{2} repeating the procedure (adding a right angle with the length of 1) the hypotenuse is sqrt{3}. And so on and so on. At some point due to the iterations some triangles are overpainted. Because of this, one repaints the overpainted triangles

Download as: [PDF] [TEX]

Рис. 15. Задача на построение в LaTex на texample.net

В этой статье мы привели небольшую часть технических решений для тематического сайта, однако надеемся, что они вдохновят читателя на новые свершения.

Список литературы

1. *Авилов Н.* Квадрат в синусе. 23.08.2021 // Математика. URL: https://elementy.ru/problems/2602/Kvadrat_v_sinuse (дата обращения: 14.11.2021).
2. Архив изданий журнала «Вестник опытной физики и элементарной математики». URL: https://www.vofem.ru/ (дата обращения: 14.11.2021).
3. Архив книг Одесского издательства «Mathesis». URL: //www.mathesis.ru (дата обращения: 14.11.2021).
4. Графическая версия информационно-поисковой системы «Задачи по геометрии». URL: https://zadachi.mccme.ru/2012/#&page1 (дата обращения: 14.11.2021).
5. *Гринберг М.* Разработка веб-приложений с использованием Flask на языке Python. ДМК Пресс, 2016. 274 с.
6. Интернет-проект МЦНМО «Задачи». URL: https://problems.ru/ (дата обращения: 14.11.2021).
7. Информатикс – учебный сервис по программированию. URL: www.informatics.mccme.ru (дата обращения: 14.11.2021).
8. МатБюро. Решение задач по математике онлайн. URL: https://www.matburo.ru/st_subject.php?p=resh#4 (дата обращения: 14.11.2021).
9. Математическая программа GeoGebra. URL: https://www.geogebra.org/ (дата обращения: 1.08.2021).
10. *Меле А.* Django 2 в примерах. ДМК Пресс, 2019. 410 с.
11. Меташкола. Интернет-кружки и олимпиады. URL: https://metaschool.ru (дата обращения: 14.11.2021).
12. *Молочков В. П.* WordPress с нуля. СПб. : БХВ-Петербург, 2021. 304 с.
13. Научно-популярный проект «Элементы большой науки». URL: https://elementy.ru (дата обращения: 14.11.2021).
14. Невозможный треугольник Рутерсварда // Миниатюры. URL: https://etudes.ru/sketches/reutersvard-impossible-triangle/ (дата обращения: 14.11.2021).
15. Параболическое решето // Миниатюры. URL: https://etudes.ru/sketches/parabolic-sieve/ (дата обращения: 14.11.2021).
16. Полное руководство по Contact Form 7. URL: https://contactform7.ru/ (дата обращения: 01.08.2021).

17. Портал обучения информатике и программированию. URL: https://school.sgu.ru/ (дата обращения: 14.11.2021).

18. Проект «Школа программиста». URL: https://acmp.ru/ (дата обращения: 14.11.2021).

19. Проект «Математическое образование». URL: https://www.mathedu.ru/ (дата обращения: 14.11.2021).

20. Проект «Эйлер». URL: https://projecteuler.net (дата обращения: 14.11.2021).

21. Распоряжение Правительства РФ от 24 декабря 2013 г. № 2506-р «О Концепции развития математического образования в РФ» // Гарант: справочно-правовая система по законодательству РФ. URL: https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/70452506/ (дата обращения: 01.08.2021).

22. Сайт платформы для создания сайтов WordPress. URL: https://wordpress.com/ru (дата обращения: 01.08.2021).

23. Седловидная поверхность: гиперболический параболоид // Модели. URL: https://etudes.ru/models/conic-sections-sadle-hyperbolic-paraboloid/ (дата обращения: 14.11.2021).

24. Система управления контентом Drupal. URL: https://drupal.ru/ (дата обращения: 1.08.2021).

25. Система управления сайтом Joomla!. URL: https://joomla.ru/ (дата обращения: 1.08.2021).

26. Скриншотер. URL: https://скриншотер.рф (дата обращения: 1.08.2021).

27. Указ Президента РФ от 9 мая 2017 г. № 203 «О Стратегии развития информационного общества в Российской Федерации на 2017–2030 годы» // Гарант: справочно-правовая система по законодательству РФ. URL: https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/71570570/ (дата обращения: 1.08.2021).

28. Учи.ру – интерактивная образовательная онлайн-платформа. URL: https://uchi.ru/ (дата обращения: 1.08.2021).

29. Фонд «Математические этюды». URL: https://etudes.ru (дата обращения: 14.11.2021).

30. Яндекс.Контест – онлайн-платформа для решения задач по программированию. URL: https://contest.yandex.ru (дата обращения: 14.11.2021).

31. 3D FlipBook – плагин для WordPress. URL: https://3dflipbook.net/ (дата обращения: 14.11.2021).

32. 3d-viewer – плагин для WordPress. URL: https://ru.wordpress.org/plugins/3d-viewer/ (дата обращения: 14.11.2021).

33. Al Zimmermann's Programming Contests – соревнования Эла Циммермана. URL: http://azspcs.com/ (дата обращения: 14.11.2021).

34. Blender – набор инструментов для 3D графики. URL: https://www.blender.org/ (дата обращения: 14.11.2021).

35. CodeCombat – многопользовательская браузерная игра. URL: https://codecombat.com/ (дата обращения: 14.11.2021).

36. Codeforces – сайт соревнований по программированию. URL: http://codeforces.com/ (дата обращения: 14.11.2021).

37. Contester – система для проведения турниров по программированию. URL: http://ulivt.ru:8082/ru/ (дата обращения: 14.11.2021).

38. Django – Python-фреймворк Python framework. URL: https://www.djangoproject.com/ (дата обращения: 14.11.2021).

39. Ejudge – система для проведения мероприятий, требующих автоматической проверки программ. URL: https://ejudge.ru/ (дата обращения: 14.11.2021).

40. ePiX – набор графических утилит. URL: https://mathcs.holycross.edu/~ahwang/epix/ePiX.html#Overview (дата обращения: 14.11.2021).

41. Flask –фреймворк framework. URL: https://palletsprojects.com/p/flask/ (дата обращения: 14.11.2021).

42. iMath. Математические приложения для iPhone и iPad // Математические этюды. URL: https://etudes.ru/imath/ (дата обращения: 14.11.2021).

43. Insert math By CMTV – плагин для WordPress // Plugins. URL: https://wordpress.org/plugins/insert-math/ (дата обращения: 14.11.2021).

44. Kaggle – онлайн-сообщество Data Scientist'ов и специалистов по машинному обучению. URL: https://www.kaggle.com/ (дата обращения: 14.11.2021).

45. Moodle LMS. Самое настраиваемое и надежное в мире решение для онлайн-обучения. URL: https://moodle.com/ (дата обращения: 1.08.2021).

46. Polygon – Professional way to prepare programming contest problems – Профессиональный способ подготовки задач для соревнований по программированию. URL: https://polygon.codeforces.com/ (дата обращения: 14.11.2021).

47. QuickLaTeX – плагин для WordPress. URL: http://www.holoborodko.com (дата обращения: 14.11.2021).

48. Sketch. URL: http://www.frontiernet.net/~eugene.ressler/ (дата обращения: 14.11.2021).

49. Stepik – российская образовательная платформа. URL: https://stepik.org (дата обращения: 14.11.2021).

50. Symphony – PHP фреймворк PHP framework. URL: https://symfony.com/ (дата обращения: 14.11.2021).

51. TeXample – галерея примеров PGF и TikZ. PGF and TikZ examples gallery. URL: https://texample.net (дата обращения: 14.11.2021).

52. Timus Online Judge – архив задач по программированию. URL: https://acm.timus.ru/ (дата обращения: 14.11.2021).

53. TopCoder – сайт соревнований по программированию. URL: https://www.topcoder.com/ (дата обращения: 14.11.2021).

54. Tridiv – 3D-редактор. URL: http://tridiv.com/ (дата обращения: 14.11.2021).

55. Vrm 360 3D Model Viewer – плагин для WordPress. URL: https://wordpress.org/plugins/vrm360/ (дата обращения: 14.11.2021).

56. Watu Quiz – плагин для WordPress. URL: https://calendarscripts.info/watupro/ (дата обращения: 14.11.2021).

57. WolframAlpha – база знаний и набор вычислительных алгоритмов. URL: https://www.wolframalpha.com/ (дата обращения: 14.11.2021).

58. Yii – PHP фреймворк framework PHP framework. URL: https://www.yiiframework.com/ (дата обращения: 14.11.2021).

Development of specialized websites in mathematics and computer science

A. I. Dementieva[1], E. N. Lubyagina[2], D. V. Shabalin[3]

[1]student, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: anuta29032000@mail.ru

[2]PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0001-5071-6208. E-mail: shishkina.en@mail.ru

[3]student, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: dish431@gmail.com

Abstract. As a result of the active digitalization of basic and additional education, a huge experience has been accumulated in the development of specialized Internet resources and their use in teaching such fields of knowledge as mathematics, computer science, physics, chemistry, etc. However, for the developer of such a resource, the question of choosing the optimal tools for creating electronic educational units and their harmonious organization is still relevant. The available technologies allow you to create sufficiently functional interactive elements of the site in an acceptable time. However, often the power of such elements directly depends on material investments, for example, on the costs of a dedicated server, hosting services, services services.

This article suggests directions for the development of site components specific to mathematics and computer science. According to the authors, convenient software tools are offered that are useful in the development of a thematic site.

Keywords: math site, programming site, content management systems, framework, WordPress, QuickLaTeX, Ejudge, Django, GeoGebra, Screenshot.

References

1. *Avilov N. Kvadrat v sinuse. 23.08.2021* [Square in the sine. 23.08.2021] // *Matematika* – Mathematics. Available at: https://elementy.ru/problems/2602/Kvadrat_v_sinuse (date accessed: 14.11.2021).

2. *Arhiv izdanij zhurnala "Vestnik opytnoj fiziki i elementarnoj matematiki"* – Archive of publications of the journal "Herald of Experimental Physics and Elementary Mathematics". Available at: https://www.vofem.ru / (date accessed: 14.11.2021).

3. *Arhiv knig Odesskogo izdatel'stva "Mathesis"* – Archive of books of the Odessa publishing house "Mathesis". Available at: //www.mathesis.ru (date accessed: 14.11.2021).

4. *Graficheskaya versiya informacionno-poiskovoj sistemy "Zadachi po geometrii* – Graphical version of the information search engine "Geometry problems". Available at: https://zadachi.mccme.ru/2012/#&page1 (date accessed: 14.11.2021).

5. *Greenberg M. Razrabotka veb-prilozhenij s ispol'zovaniem Flask na yazyke Python* [Development of web applications using Flask in Python]. DMK Press. 2016. 274 p.

6. *Internet-proekt MCNMO "Zadachi"* – ICNMO Internet project "Tasks". Available at: https://problems.ru / (date accessed: 14.11.2021).

7. *Informatiks – uchebnyj servis po programmirovaniyu* – Informatics – educational programming service. Available at: www.informatics.mccme.ru (date accessed: 14.11.2021).

8. *MatByuro. Reshenie zadach po matematike onlajn* – MatBuro. Solving math problems online. Available at: https://www.matburo.ru/st_subject.php?p=resh#4 (date accessed: 14.11.2021).

9. *Matematicheskaya programma GeoGebra* – Mathematical program GeoGebra. Available at: https://www.geogebra.org / (accessed: 1.08.2021).

10. *Mele A. Django 2 v primerah* [Django 2 in examples]. DMK Press. 2019. 410 p.

11. *Metashkola. Internet-kruzhki i olimpiady* – Metaschool. Internet clubs and Olympiads. Available at: https://metaschool.ru (date accessed: 14.11.2021).

12. *Molochkov V. P. WordPress s nulya* [WordPress from scratch]. SPb. BHV-Petersburg. 2021. 304 p.

13. *Nauchno-populyarnyj proekt "Elementy bol'shoj nauki"* – Popular science project "Elements of big science". Available at: https://elementy.ru (date accessed: 14.11.2021).

14. *Nevozmozhnyj treugol'nik Rutersvarda* – The impossible triangle of Rutersvard // *Miniatyury* – Miniatures. Available at: https://etudes.ru/sketches/reutersvard-impossible-triangle / (date accessed: 14.11.2021).

15. *Parabolicheskoe resheto* – Parabolic sieve // *Miniatyury* – Miniatures. Available at: https://etudes.ru/sketches/parabolic-sieve / (date accessed: 14.11.2021).

16. *Polnoe rukovodstvo po Contact Form 7* – Complete guide to Contact Form 7. Available at: https://contactform7.ru / (accessed: 01.08.2021).

17. *Portal obucheniya informatike i programmirovaniyu* – Portal of Computer science and programming education. Available at: https://school.sgu.ru / (date accessed: 14.11.2021).

18. *Proekt "Shkola programmista"* – The project "Programmer's School". Available at: https://acmp.ru / (date accessed: 14.11.2021).

19. *Proekt "Matematicheskoe obrazovanie"* – The project "Mathematical education". Available at: https://www.math-edu.ru / (date accessed: 14.11.2021).

20. *Proekt "Ejler"* – The Euler project. Available at: https://projecteuler.net (date accessed: 14.11.2021).

21. Decree of the Government of the Russian Federation No. 2506-r dated December 24, 2013 "On the Concept of the development of mathematical education in the Russian Federation" // Garant: legal reference system according to the legislation of the Russian Federation. Available at: https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/70452506 / (date accessed: 01.08.2021) (in Russ.).

22. *Sajt platformy dlya sozdaniya sajtov WordPress* – Website of the WordPress website creation platform. Available at: https://wordpress.com/ru (date accessed: 01.08.2021).

23. *Sedlovidnaya poverhnost': giperbolicheskij paraboloid* – Saddle-shaped surface: hyperbolic paraboloid // *Modeli* – Models. Available at: https://etudes.ru/models/conic-sections-sadle-hyperbolic-paraboloid / (date accessed: 14.11.2021).

24. *Sistema upravleniya kontentom Drupal* – Drupal content management system. Available at: https://drupal.ru / (accessed: 1.08.2021).

25. *Sistema upravleniya sajtom Joomla!* – Joomla! Website management system. Available at: https://joomla.ru / (accessed: 1.08.2021).

26. *Skrinshoter* – Screenshot. Available at: https://скриншотер.рф (date accessed: 1.08.2021).

27. Decree of the President of the Russian Federation dated May 9, 2017 No. 203 "On the Strategy for the development of the Information Society in the Russian Federation for 2017– 2030" // Garant: legal reference system for the legislation of the Russian Federation. Available at: https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/71570570 / (date accessed: 1.08.2021) (in Russ.).

28. *Uchi.ru – interaktivnaya obrazovatel'naya onlajn-platforma* – Uchi.ru is an interactive online educational platform. Available at: https://uchi.ru / (date of reference: 1.08.2021).

29. *Fond "Matematicheskie etyudy"* – Foundation "Mathematical Studies". Available at: https://etudes.ru (date accessed: 14.11.2021).

30. *Yandeks.Kontest – onlajn-platforma dlya resheniya zadach po programmirovaniyu* – Yandex.Contest – online platform for solving programming problems. Available at: https://contest.yandex.ru (date accessed: 11/14/2021).

31. *3D FlipBook – plagin dlya WordPress* – 3D FlipBook – plugin for WordPress. Available at: https://3dflip-book.net / (date accessed: 11/14/2021).

32. *3d-viewer – plagin dlya WordPress* – 3d-viewer – plugin for WordPress. Available at: https://ru.wordpress.org/plugins/3d-viewer / (date accessed: 14.11.2021).

33. *Al Zimmermann's Programming Contests – sorevnovaniya Ela Cimmermana* – Al Zimmermann's Programming Contests – Al Zimmermann's competitions. Available at: http://azspcs.com / (date accessed: 14.11.2021).

34. *Blender – nabor instrumentov dlya 3D grafiki* – Blender – a set of tools for 3D graphics. Available at: https://www.blender.org / (date accessed: 11/14/2021).

35. *CodeCombat – mnogopol'zovatel'skaya brauzernaya igra* – CodeCombat – multiplayer browser game. Available at: https://codecombat.com / (date accessed: 11/14/2021).

36. *Codeforces – sajt sorevnovanij po programmirovaniyu* – Codeforces – website of programming competitions. Available at: http://codeforces.com / (date accessed: 11/14/2021).

37. *Contester – sistema dlya provedeniya turnirov po programmirovaniyu* – Contester – system for programming tournaments. Available at: http://ulivt.ru:8082/ru / (date accessed: 14.11.2021).

38. *Django – Python-frejmvork Python framework* – Django – Python is a Python framework. Available at: https://www.djangoproject.com / (date accessed: 14.11.2021).

39. *Ejudge – sistema dlya provedeniya meropriyatij, trebuyushchih avtomaticheskoj proverki programm* – Ejudge – system for conducting events that require automatic program verification. Available at: https://ejudge.ru / (date accessed: 14.11.2021).

40. *ePiX – nabor graficheskih utilit* – ePiX – a set of graphical utilities. Available at: https://mathcs.holycross.edu /~ahwang/epix/ePiX.html#Overview (accessed date: 14.11.2021).

41. *Flask – frejmvork framework* – Flask – framework framework. Available at: https://palletsprojects.com/p/flask / (date accessed: 14.11.2021).

42. *iMath. Matematicheskie prilozheniya dlya iPhone i iPad* – iMath. Mathematical applications for iPhone and iPad // Mathematical studies. Available at: https://etudes.ru/imath / (date accessed: 14.11.2021).

43. *Insert math By CMTV – plagin dlya WordPress* – Insert math By CMTV – plugin for WordPress // Plugins. Available at: https://wordpress.org/plugins/insert-math / (date accessed: 14.11.2021).

44. *Kaggle – onlajn-soobshchestvo Data Scientist'ov i specialistov po mashinnomu obucheniyu* – Kaggle – online community of Data Scientists and machine learning specialists. Available at: https://www.kaggle.com / (date accessed: 14.11.2021).

45. *Moodle LMS. Samoe nastraivaemoe i nadezhnoe v mire reshenie dlya onlajn-obucheniya* – Moodle LMS. The world's most customizable and reliable online learning solution. Available at: https://moodle.com / (accessed: 1.08.2021).

46. *Polygon – Professional way to prepare programming contest problems – Professional'nyj sposob podgotovki zadach dlya sorevnovanij po programmirovaniyu* – Polygon – Professional way to prepare programming contest problems – A professional way to prepare tasks for programming competitions. Available at: https://polygon.codeforces.com / (date accessed: 14.11.2021).

47. *QuickLaTeX – plagin dlya WordPress* – QuickLaTeX – a plugin for WordPress. Available at: http://www.holoborodko.com (date accessed: 14.11.2021).

48. Sketch. Available at: http://www.frontiernet.net/~eugene.ressler/ (accessed date: 14.11.2021).

49. *Stepik – rossijskaya obrazovatel'naya platforma* – Stepik – Russian educational platform. Available at: https://stepik.org (date accessed: 14.11.2021).

50. *Symphony – PHP frejmvork PHP framework* – Symphony – PHP framework PHP framework. Available at: https://symfony.com / (date accessed: 11/14/2021).

51. *TeXample – galereya primerov PGF i TikZ. PGF and TikZ examples gallery* – TeXample – gallery of PGF and TikZ examples. PGF and TikZ examples gallery. Available at: https://texample.net (date accessed: 11/14/2021).

52. *Timus Online Judge – arhiv zadach po programmirovaniyu* – Timus Online Judge – archive of programming tasks. Available at: https://acm.timus.ru / (date accessed: 14.11.2021).

53. *TopCoder – sajt sorevnovanij po programmirovaniyu* – TopCoder – website of programming competitions. Available at: https://www.topcoder.com / (date accessed: 14.11.2021).

54. *Tridiv – 3D-redaktor* – Tridiv – 3D editor. Available at: http://tridiv.com / (date accessed: 14.11.2021).

55. *Vrm 360 3D Model Viewer – plagin dlya WordPress* – Vrm 360 3D Model Viewer – plugin for WordPress. Available at: https://wordpress.org/plugins/vrm360 / (date accessed: 11/14/2021).

56. *Watu Quiz – plagin dlya WordPress* – Watu Quiz – plugin for WordPress. Available at: https://calendarscripts.info/watupro / (date accessed: 14.11.2021).

57. *WolframAlpha – baza znanij i nabor vychislitel'nyh algoritmov* – WolframAlpha – knowledge base and a set of computational algorithms. Available at: https://www.wolframalpha.com / (date accessed: 14.11.2021).

58. *Yii – PHP frejmvork framework PHP framework* – Yii – PHP framework framework PHP framework. Available at: https://www.yiiframework.com / (date accessed: 14.11.2021).

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

УДК 378.4(091) DOI 10.25730/VSU.0536.21.026

Кафедра математического анализа Пермского педуниверситета и ее преподаватели

Л. П. Латышева
кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики и методики обучения математике, Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет. Россия, г. Пермь. E-mail: lublat@mail.ru

Аннотация. В связи с юбилейной датой – столетием со дня основания Пермского гуманитарно-педагогического университета – важно осознавать какие этапы становления и развития пройдены его подразделениями, и какой вклад они внесли в общее дело высшего профессионального педагогического образования. В данной статье названные аспекты раскрываются в отношении старейшей в вузе кафедры математического анализа. Приводятся интересные сведения из жизни, педагогической и научно-исследовательской деятельности работавших в разное время на различных факультетах педагогического вуза ее преподавателей.

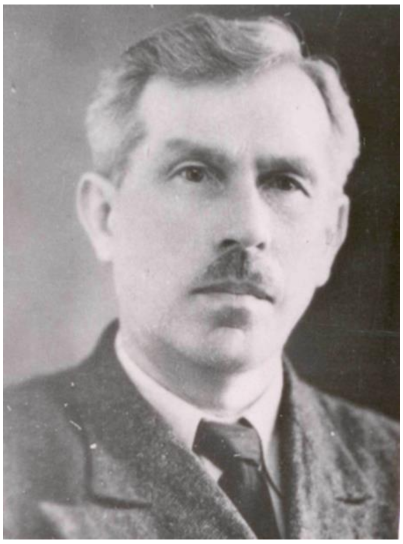
Ключевые слова: Пермский пединститут, Пермский педагогический университет, кафедра математического анализа, математическое образование, подготовка учителя, математический анализ, обучение математике, научно-исследовательская работа.

В постановлении плановой Комиссии Главпрофобра от 9 сентября 1921 года было принято решение об основании Пермского педагогического института. Состоял он из трех факультетов: дошкольного воспитания, педагогического и школьно-инструкторского. Педагогический факультет имел в своем составе физико-математическое отделение. Разделы, относящиеся к высшей математике, преподавались в институте с момента его открытия. Отдельная кафедра высшей математики, в дальнейшем именуемая кафедрой математического анализа, образовалась в 1938 г. Возглавил кафедру кандидат физико-математических наук, доцент Борис Васильевич Бородин и был руководителем кафедры до 1956 года.

Рис. 1. Преподаватели и студенты – выпускники математического факультета 1938 года.

Основной учебной дисциплиной в первые годы был математический анализ. В 40–50-х годах XX века к ним добавились: теория функций, дифференциальная геометрия, методы математической физики, история математики, а затем и теория вероятностей. В связи с этим с 1955 г. она называлась кафедрой высшей математики. В 1972 г. при перестройке системы подготовки учителей математики в пединститутах первоначальное название было восстановлено. Кафедра оказала заметное влияние на развитие математического просвещения на Урале. В ее составе всегда трудились замечательные преподаватели, покорявшие студентов педагогическим мастерством и научной эрудицией, воспитавшие много поколений учителей (Рис. 1).

Кафедрой заведовали: Борис Васильевич Бородин, Иван Иванович Лихолетов, Иван Васильевич Мисюркеев, Лев Израилевич Волковыский, Игорь Дмитриевич Пехлецкий, Юрий Федорович Фоминых. Годы их руководства кафедрой отмечены на Рис. 2–3.



Б. В. Бородин – зав. кафедрой в 1938–1956 гг.

И. И. Лихолетов – зав. кафедрой в 1956–1961 гг.

И. В. Мисюркеев – зав. кафедрой в 1961–1962 гг.

Рис. 2. Заведующие кафедрой в годы ее становления и развития

Борис Васильевич Бородин (Рис. 2) родился в 1892 году в Перми. В 1917 г. окончил Московский университет. В 1920–1922 гг. работал преподавателем в Московском математическом институте, в 1922–1932 гг. – ассистентом кафедры математики ПГУ. В 1932 г. был избран на должность доцента кафедры математики ПГПИ, в 1938 г. возглавил вновь созданную кафедру математического анализа. В годы Великой Отечественной войны он выступал с пропагандистскими лекциями и беседами перед населением города. В 1947–1957 гг. был деканом физико-математического факультета, в 1954 г. – депутатом Пермского горсовета. Научные труды кандидата физико-математических наук Б.В. Бородина посвящены вопросам теории комплексных чисел и методике преподавания математики в школе. Он является автором учебника математики для 4-го класса (1932 г.), а также многочисленных статей в «Ученых записках ПГПИ». Б. В. Бородин награжден орденом Ленина (1953), медалью «За доблестный труд в Великой Отечественной войне 1941–1945 гг.» (1947), знаком «Отличник народного просвещения» (1948)[1].

Иван Иванович Лихолетов (Рис. 2) родился 28 октября 1910 года в Санкт-Петербурге. В 1931 г. окончил Воронежский лесотехнический институт. В 1936 г. поступил в ЛГУ на механико-математический факультет, в 1937 г. Перевелся в МГУ на заочное отделение. Работал преподавателем в средних школах Воронежской области. В 1941 г. был мобилизован и командирован на один из заводов в город Пермь. В 1949 г. закончил обучение в МГУ и был принят ассистентом кафедры математического анализа физико-математического факультета ПГПИ. В 1953 г. окончил аспирантуру, в 1954 г. защитил кандидатскую диссертацию, став кандидатом физико-математических наук, вел занятия по математическому анализу, теории функций и другим дисциплинам. С 1953 г. стал старшим преподавателем кафедры математического анализа ПГПИ. В 1954 г. был избран деканом физико-математического факультета ПГПИ. В 1955 г. ему присвоено звание доцента. В 1961 году перешел на другую работу. Научные интересы его связаны с теорией функций. Он является одним из авторов книги «Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике». И. И. Лихолетов награжден медалью «За доблестный труд в Великой Отечественной войне 1941–1945 гг.».

Иван Васильевич Мисюркеев (Рис. 2) родился 21 января 1917 года в селе Суво Баргузинского уезда Иркутской губернии. В 1939 г. с отличием окончил математическое отделение физико-математического факультета Иркутского педагогического института и в нем стал ассистентом кафедры математики. С 1940 г. работал в школах Забайкалья, в 1947 г. – в Хабаровском пединституте ассистентом, затем старшим преподавателем кафедры математики. В 1952 г. был направлен в аспирантуру в Ленинградском университете, где успешно защитил кандидатскую диссертацию с присуждением ученой степени кандидата физико-математических наук. Преподавал в педагогических институтах Хабаровска и Кургана. В 1957 г. был принят доцентом кафедры высшей математики ПГПИ. С 1958 г. по 1959 г. работал заместителем директора ПГПИ по учебной работе. В 1962 г. перешел на работу в

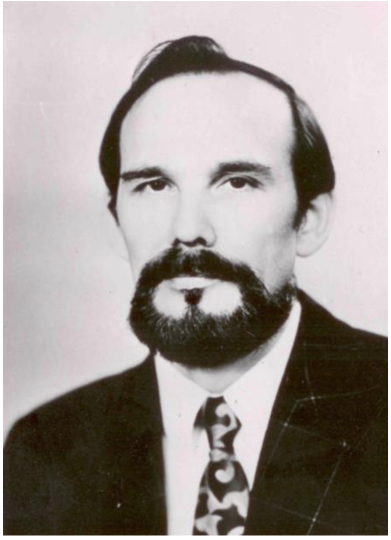
[1] Здесь и далее сведения о персоналиях основаны на архивных материалах кафедры математического анализа и некоторых биографических данных, указанных в [1].

ПГУ. Он, автор сборника задач по методам математической физики, возглавил в ПГПИ научное направление – нелинейный функциональный анализ. И. В. Мисюркеев награжден медалью «За доблестный труд в Великой Отечественной войне 1941–1945 гг.», орденом «Знак Почета».

Лев Израилевич Волковыский (Рис. 3) родился 18 марта 1913 г. в Белостоке. В 1935 г. окончил физико-математический факультет МГПИ, в 1937 г. – аспирантуру при Научно-исследовательском институте математики МГУ, защитив кандидатскую диссертацию. В 1947 г. окончил докторантуру при Московском институте им. В.А. Стеклова. В 1948 г. защитил докторскую диссертацию, в 1949 г. был утвержден в звании профессора. Он работал в различных вузах страны: в МИХИ, МГУ, Томском пединституте, Львовском университете. В 1955 г. стал профессором, зав. кафедрой теории функций ПГУ и по совместительству – профессором кафедры высшей математики ПГПИ. Читал курсы математического анализа и теории функций. Доктор физико-математических наук, профессор Л. И. Волковыский в 1962 г. создал научную школу исследователей вопросов теории функций комплексного переменного (был научным руководителем кандидатских диссертаций по теории функций комплексного переменного, возглавлял исследования в области теории римановых поверхностей и геометрических вопросов функций комплексного переменного). Многие из его учеников защитили докторские и кандидатские диссертации (в том числе впоследствии заведовавшие кафедрой математического анализа Игорь Дмитриевич Пехлецкий и Юрий Федорович Фоминых). С 1963 г. заведовал кафедрой высшей математики ПГПИ, руководил научной работой аспирантов. В 1965 г. переехал в г. Ташкент, где работал профессором кафедры теории функций университета. Он – автор нескольких монографий и книг, в том числе сборника задач по теории функций комплексного переменного для студентов педагогических вузов и университетов.

Л. И. Волковыский – зав. кафедрой в 1963–1965 гг.

И. Д. Пехлецкий – зав. кафедрой в 1965–1983 гг.; в 1988–2001 гг.



Ю. Ф. Фоминых – зав. кафедрой в 1983–1988 гг.

Рис. 3. Учитель и его ученики – заведующие кафедрой

В общей сложности более 30 лет кафедрой заведовал Игорь Дмитриевич Пехлецкий (Рис. 3). Он родился 3 июля 1938 г. в Перми. В 1960 г. окончил с отличием физико-математический факультет ПГУ, в 1964 г. – одногодичную аспирантуру при кафедре высшей математики ПГПИ. Защитил в 1964 г. кандидатскую диссертацию и стал кандидатом физико-математических наук. В 1961 г. работал учителем математики Полазненской школы Пермской области. Работая в ПГПИ с 1961 г., был ассистентом, старшим преподавателем, доцентом, профессором. В 1988 г. защитил докторскую диссертацию и получил ученую степень доктора педагогических наук. Возглавлял на кафедре научное направление исследований по теме «Моделирование закономерностей процесса обучения», руководил аспирантурой. Являлся членом диссертационных советов по защите докторских и кандидатских диссертаций по математике, педагогике, психологии в Перми, Тюмени. Автор многочисленных научных и учебно-методических публикаций по теории функций комплексного переменного, методике преподавания математики и педагогике, в том числе учебника «Математика» для средних специальных учебных заведений. И. Д. Пехлецкий награжден знаком «Отличник народного просвещения», удостоен звания «Заслуженный работник высшей школы», избран действительным членом (академиком) Международной педагогической академии – научно-творческого сообщества ученых и педагогов стран СНГ.

Рис. 4. Профессор
И. Д. Пехлецкий (1938–2001)

На сайте Пермского государственного научно-исследовательского университета (ПГНИУ) в разделе «Наши выпускники» отмечается: «Игорь Дмитриевич был эрудированным ученым с широким спектром изучения математики. Он возглавил научное направление по вопросам приложения математики и кибернетики к биологии, психологии и медицине. Разработал оригинальную концепцию системного подхода к изучению процессов и явлений разной качественной природы. Эта концепция была реализована в докторской диссертации «Структурно-количественный анализ как аппарат дидактических исследований (педагогико-математический аспект)». И. Д. Пехлецкому принадлежит цикл теоретических и экспериментальных работ на стыке областей дидактики, методики преподавания математики, психологии и прикладной математики. Богатством своих знаний он щедро делился с коллегами, аспирантами. Сегодня научная школа И. Д. Пехлецкого наряду с другими занимает достойное место в педагогическом университете» [2] (Рис. 4).

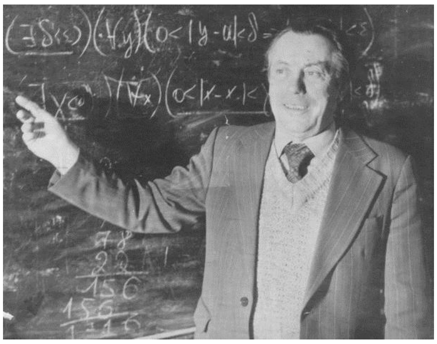
Юрий Федорович Фоминых (Рис. 3) родился 18 марта 1937 г. в селе Ершовка (Удмуртия). В 1959 г. окончил математический факультет ПГУ, в нем был принят инженером вычислительного центра, работал старшим преподавателем, доцентом. В 1964–1967 гг. обучался в аспирантуре при кафедре теории функций ПГУ. Защитил кандидатскую диссертацию, получил ученую степень кандидата физико-математических наук. В 1975–1983 гг. заведовал кафедрой математики ПГСХИ. В ПГПИ содействовал открытию и становлению кафедры информатики. В 1993 г. защитил докторскую диссертацию, став доктором педагогических наук. В 1989 г. занял должность зав. кафедрой методики преподавания естественнонаучных дисциплин ПОИПКРО. В последующее время Ю. Ф. Фоминых заведовал кафедрой математики Пермского военного института ракетных войск, стал академиком Академии естествознания. Научные труды посвящены теории функций комплексного переменного и исследованию вопросов формирования научного мировоззрения учащихся. Он является автором многочисленных научных и учебно-методических публикаций, в том числе одним из авторов монографии «Педагогика математики».

В числе сотрудников кафедры были участники Великой Отечественной войны 1941–1945 гг., фронтовики и труженики тыла (Рис. 5).

Старший преподаватель В. Г. Куколев

Доцент В. И. Яцеев

Доцент И. М. Лурье



Доцент Н. Г. Гонин

Рис. 5. Преподаватели кафедры, участники трудового фронта и боев с фашистскими захватчиками в Великой Отечественной войне 1941–1945 гг.

Владимир Георгиевич Куколев (Рис. 5), старший преподаватель, окончив в 1940 г. физико-математическое отделение ПГПИ, ушел служить в Красную Армию. Был курсантом учебной батареи отдельного зенитного дивизиона соединения. После тяжелого ранения в 1943 г. был снят с военного учета. Награжден медалями «За победу над Германией в Великой Отечественной войне 1941–1945 гг.», «За доблестный труд в Великой Отечественной войне 1941–1945 гг.» [1, с. 215], «50 лет Вооруженных Сил СССР», «20 лет Победы над Германией». Научные интересы – математическая логика, теория чисел, программирование. Автор цикла публикаций и учебных пособий «Избранные разделы математики» для студентов вуза.

Яцеев Василий Иванович (Рис. 5), кандидат физико-математических наук, доцент, после окончания в 1941 г. физико-математического факультета Иркутского педагогического института участвовал в боях Великой Отечественной войны сапером и разведчиком, командиром роты истребителей танков, командиром отдельной механизированной разведроты. За боевые заслуги он награждён двумя орденами Отечественной войны II степени, орденом Красной Звезды, орденом Александра Невского [1, с. 415]. Он автор большого числа научных и методических статей и пособий для студентов, декан математического факультета.

Израиль Мовшевич Лурье (Рис. 5), доцент, вначале Великой Отечественной войны, в 1941 г., направлен на завод им. Ф. Э. Дзержинского. Работал сначала станочником, затем – бригадиром, – мастером участка, которому было присвоено звание «Фронтовой». Он был автором многих учебных пособий для студентов и учителей; изучал проблемы совершенствования обучения математике студентов математического и физического факультетов.

Николай Григорьевич Гонин (Рис. 5), кандидат технических наук, доцент, после окончания пермской школы № 11 ушел добровольцем служить в рядах Красной Армии. Воевал в составе артиллерийской противотанковой бригады 1-го Украинского фронта. Он награжден орденами Красной Звезды и Отечественной войны IIстепени, многочисленными медалями [1, с. 113]. Научные публикации посвящены вопросам статистических методов регулирования качества продукции.

Проблемы совершенствования профессиональной подготовки будущих учителей и преподавания математики в вузе и школе были активно развиваемым научным направлением кафедры в течение всего времени ее существования. Проводились исследования по проблемам использования достижений математики и кибернетики в психологии, медицине, биологии. В 1969 г. при кафедре открылась вычислительная лаборатория, оснащенная быстродействующей ЭВМ «Минск-1» (Рис. 6).

Научные разработки в разных областях теоретической и прикладной математики характерны для всех периодов деятельности кафедры (Рис. 7). В 1961 г. создается научное направление по нелинейному функциональному анализу, в 1962 г. – по теории функций комплексного переменного, в 1980 г. – по теории дифференциальных уравнений, в 90-е годы – по изучению методов решения прикладных задач. Преподаватели вели активную научную работу, участвовали во всесоюзных, республиканских и зональных конференциях. Преподаватели и сотрудники кафедры на постоянной основе поддерживали научное сотрудничество с педагогами и учеными многих городов страны, в том числе Москвы, Санкт-Петербурга, Екатеринбурга, Казани, Йошкар-Олы, Ульяновска, Ярославля, Саранска, Саратова, Челябинска, Магнитогорска, Барнаула, Вологды, Тюмени, Красноярска и др.

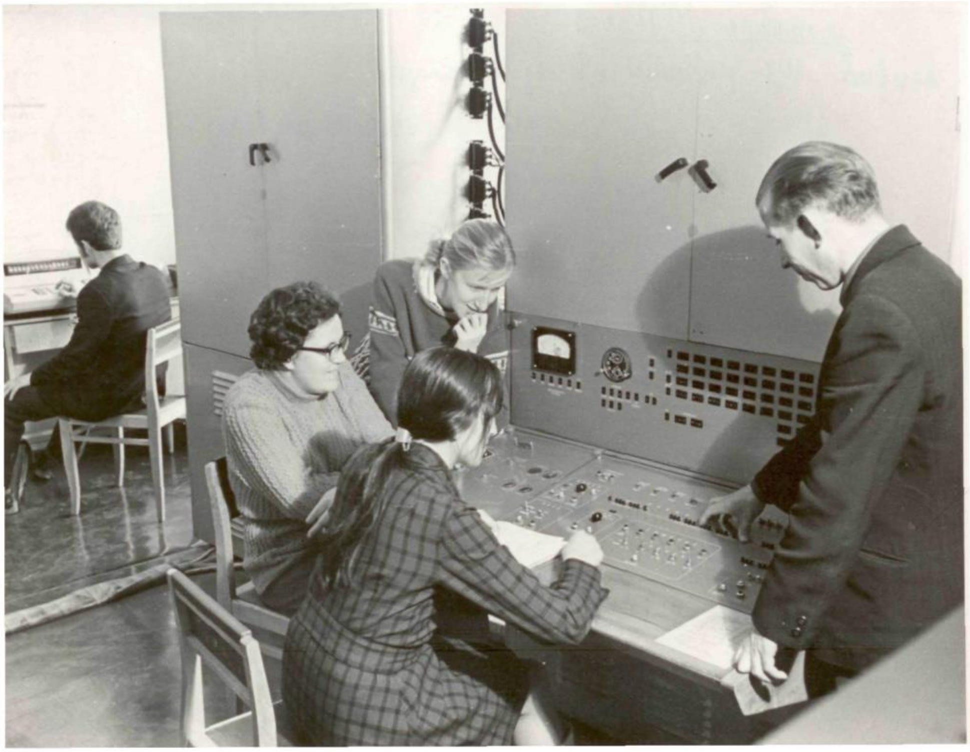


Рис. 6. На ЭВМ «Минск-1» занятие со студентами проводит старший преподаватель Лариса Всеволодовна Пономарева

Научные исследования преподавателей кафедры математического анализа в области прикладной математики характерны для всех периодов. В 1980 г. складывается направление, связанное с теорией дифференциальных уравнений. Другое направление – «Исследование проблем совершенствования профессиональной подготовки будущих учителей» (Рис. 8).

Рис. 7. Кафедра математического анализа в 70-е годы XX века

Рис. 8. Сотрудники кафедры математического анализа в 80-е годы XX века

В 90-е годы XX века в русле научных идей, разработанных профессором И. Д. Пехлецким, сотрудниками кафедры проводились коллективные научно-педагогические исследования по направлениям: математизированные модели дидактических явлений и процессов; проблемы совершенствования преподавания математики в средней и высшей школе; проблемы преподавания математического анализа в вузе (Рис. 9).

В русле разрабатываемых на кафедре научно-педагогических направлений коллективом авторов были созданы Концепции регионального стандарта математического образования для г. Перми (1995 г.), системы региональных образовательных стандартов для общеобразовательных учебных заведений Пермской области (1996 г.), регионального стандарта математического образования для Пермской области (2001 г.).

Рис. 9. Кафедра математического анализа в 90-е годы XX века

Основная учебная дисциплина, определяющая профиль кафедры в 2000-е годы, – математический анализ, включающий в себя разделы современной математики, относящиеся к классическому анализу, тории функции комплексного переменного, теории дифференциальных уравнений. Кафедра осуществляла также преподавание теории вероятности и математической статистики и ряда специальных курсов (Рис. 10).

Рис. 10. Кафедра математического анализа в 2000-е годы

Под руководством профессора И. Д. Пехлецкого в 1989 г. на кафедре была открыта аспирантура (по специальности 13.00.01 – общая педагогика и история педагогики и образования). В рамках этой аспирантуры подготовлены диссертационные исследования и защищены диссертации на соискание ученой степени кандидата и доктора наук по указанной специальности (Рис. 11).

Ирина Павловна Лебедева (на фото (Рис. 11) первая слева) в 1989 г. окончила ПГПИ, в 1989–1992 гг. обучалась в очной аспирантуре, защитила кандидатскую диссертацию; в 1992–2002 гг. работала ассистентом, старшим преподавателем, доцентом; опубликовала большое число научных работ, в том числе монографию, в 2001 г. защитила докторскую диссертацию по педагогике. В последующее время – профессор, возглавляющий научно-исследовательскую лабораторию.

Последовательное развитие вычислительной лаборатории кафедры математического анализа при оснащении и переоснащении ее все более и более быстродействующими, современными ЭВМ («МИР-2» и др.), а затем – персональными компьютерами соответствовало требованиям времени.

Все это положило начало компьютеризации учебного процесса и позволило открыть в 1986 г. под руководством профессора Е. К. Хеннерановую кафедру – кафедры информатики и вычислительной техники, а затем – факультета информатики и экономики.

Рис. 11. Ученицы профессора И. Д. Пехлецкого

Евгений Карлович Хеннер (Рис. 12) в 1968 г. окончил ПГУ, в 1971 г. – аспирантуру, в 1973 г. защитил кандидатскую, в 1991 г. – докторскую диссертации. В ПГПИ с 1972 г. ассистент, затем старший преподаватель, доцент кафедры математического анализа, с 1985 г. заведующий кафедрой информатики и вычислительной техники, декан математического факультета. В области физики ученому принадлежит цикл работ по основам теории спиновой динамики в магниторазбавленных твердых телах. Он доктор физико-математических наук, профессор, член научно-технического совета по информационным технологиям в образовании Минобразования РФ, с 1997 г. возглавляет координационный совет по информатизации образования при краевом департаменте образования и науки, с 2002 г. работает в ПГУ (в настоящее время ПГНИУ). Он – один из авторов семи учебных пособий по информатике, изданных по итогам конкурсов Минобразования РФ и различных фондов, является лауреатом премии Президента РФ в области образования, награжден знаками «Отличник высшей школы», «Отличник народного образования», медалью им. К. Д. Ушинского.

Рис. 12. Доктора наук (слева направо): И. Д. Пехлецкий, Ю. Ф. Фоминых, Е. К. Хеннер

Многие сотрудники кафедры стали ведущими учеными страны, издали учебные пособия и учебники для вузов. Так, на Рис. 13 представлены классический задачник по теории функций комплексного переменного (один из авторов – Л. И. Волковыский); руководство по высшей математике для вузов (один из авторов – И. И. Лихолетов); учебник по информатике для пединститутов (один из авторов – Е. К. Хеннер); задачник по методам математической физики (автор И. В. Мисюркеев).

Рис. 13. Получившие широкое признание вузовские учебники и учебные пособия авторов – преподавателей кафедры математического анализа

Основные научные результаты профессора И. Д. Пехлецкого в области педагогики связаны с разработанной им концепцией структурно-количественного анализа функционирования дидактических систем. Его учебник «Математика» для средних специальных учебных заведений неоднократно переиздан. На Рис. 14 представлены его труды, посвященные профессиональной подготовке будущего учителя математики, учебник «Математика» и сборник воспоминаний и статей «Проблемы вузовской педагогической и математической подготовки специалиста: материалы Всероссийской научно-практической конференции, изданный в честь 65-летия со дня его рождения и в память о нем.

В течение многих лет на кафедре были представлены следующие направления научно-исследовательской работы: *1) моделирование закономерностей обучения как основа совершенствования учебного процесса; 2) математические методы решения прикладных задач; 3) исследование механизмов интеграции математических знаний в профессиональной подготовке учителя математики; 4) совершенствование профессиональной подготовки учителя математики.*

Много лет на кафедре проработал старший преподаватель Лев Борисович Бурди (на фото (Рис. 10) второй слева во втором ряду), в рамках второго из указанных направлений проводил научные исследования по теме «Плоскопараллельные течения идеальной несжимаемой жидкости».

Рис. 14. Труды И. Д. Пехлецкого и воспоминания о нем в материалах конференции

Ассистент (в настоящее время кандидат педагогических наук, имеющая ученое звание доцента) Елена Леонидовна Черемных (на фото (Рис. 15) слева) проводила исследования о проведении дидактических оценок системообразующей роли образовательной области «математика» в образовании, защитила диссертацию «Формирование комплекса математико-методологических умений при обучении математике будущих бакалавров физико-математического образования в педагогическом вузе». Ассистент Ольга Анатольевна Неволина (на фото (Рис. 15) справа) изучала свойство устойчивости специального вида дифференциальных уравнений.

Рис. 15. Ассистент (ныне доцент) Черемных Е. Л. и ассистент Неволина О. А.

Кандидат физико-математических наук, доцент Алексей Лаврентьевич Краснощеков (Рис. 16) проводил и проводит исследования по теме «Функции одной и многих комплексных переменных. Интегральные представления и формулы». Кандидат физико-математических наук, доцент Иван Иванович Кобяков (Рис. 16) занимался исследованием вопросов существования решений функционально-дифференциальных уравнений. Их исследования также относятся ко второму направлению.

Рис. 16. Доцент А. Л. Краснощеков и доцент И. И. Кобяков

Рис. 17. Профессор Е. И. Смирнов и доцент Л. П. Латышева

Евгений Иванович Смирнов (Рис. 17), кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук, профессор, окончил Ярославский педагогический институт. Он работает в ПГПУ с 2004 г., активно руководит исследовательской деятельностью студентов-магистрантов и аспирантов, является автором 12 монографий и нескольких учебных пособий. Он один из разработчиков апробированного в Ярославском педуниверситете оригинального учебного плана подготовки учителей математики, координатор международных программ и руководитель исследований в рамках третьего направления. Он почетный работник высшего профессионального образования, академик РАЕН. Под его руководством защищена одна докторская и 12 кандидатских диссертаций.

«Повышение качества профессиональной математической подготовки будущего учителя» – такова тематика исследований в рамках четвертого направления кандидата педагогических наук, доцента Любови Павловны Латышевой (Рис. 17), с 2001 г. по 2011 г. заведовавшей кафедрой математического анализа.

В рамках последнего из названных научных направлений работали все преподаватели кафедры математического анализа и продолжают свои исследования в составе других кафедр до настоящего времени.

Старший преподаватель Лариса Георгиевна Недре (Рис. 18) исследовала роль фактора детерминированности в учебном процессе и практиковала в обучении современные технологии.

Старший преподаватель Светлана Артемовна Юганова (Рис. 18) активно внедряла в учебный процесс использование системы MATHCAD.

В рамках данного направления начала научную работу ассистент Анна Юрьевна Скорнякова (Рис. 18); защитив кандидатскую диссертацию «Формирование исследовательских компетенций в обучении математике будущих бакалавров педагогического образования с использованием информационно-коммуникационной среды», стала кандидатом педагогических наук, доцентом.

В создании учебно-методических материалов участвовали все сотрудники кафедры. На Рис. 19 приведены некоторые из изданий кафедры, активно применявшиеся и до сих пор использующиеся в учебном процессе на разных факультетах нашего вуза.

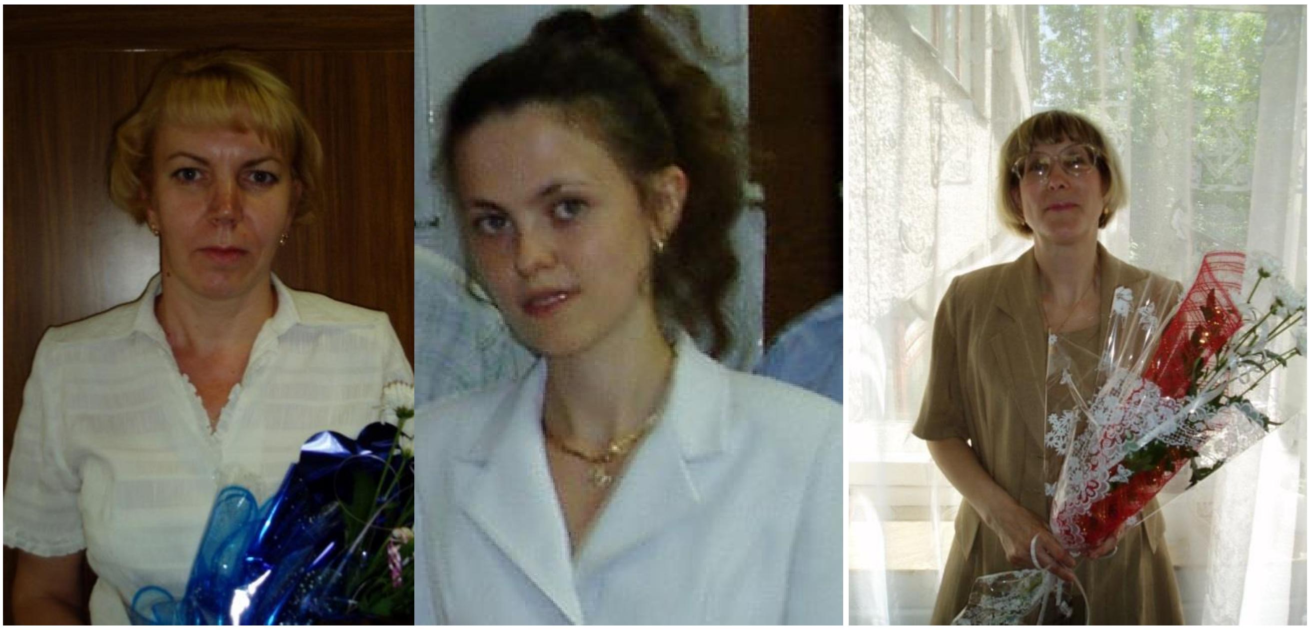


Рис. 18. Старший преподаватель Л. Г. Недре, ассистент (ныне доцент) А. Ю. Скорнякова и старший преподаватель С. А. Юганова

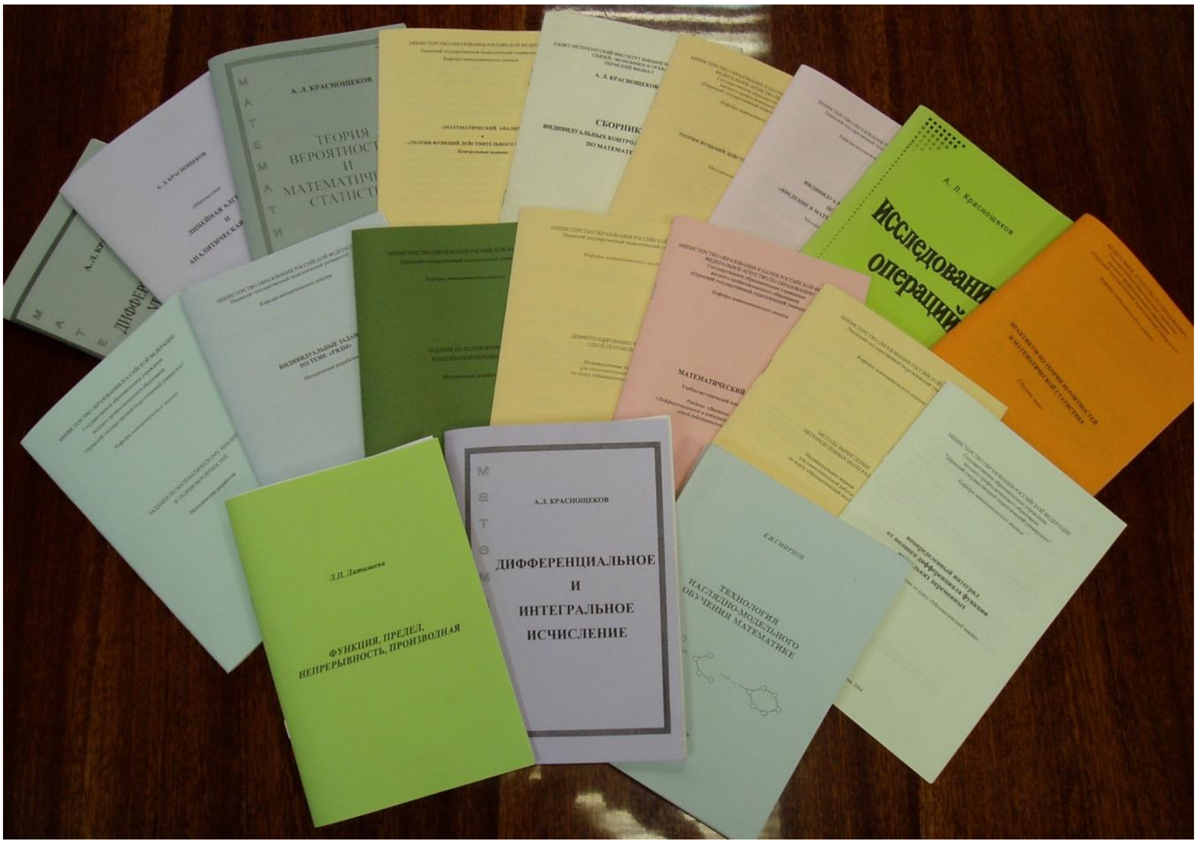


Рис. 19. Изданные в разные годы учебные пособия и учебно-методические разработки преподавателей кафедры математического анализа

С учетом потребностей педагогического вуза и научных интересов преподавателей велись объединенные курсы математики на нескольких факультетах: физическом, биолого-химическом, информатики и экономики; студентов этих факультетов обучали практически все преподаватели кафедры математического анализа (Рис. 20).

Рис. 20. Преподаватели кафедры математического анализа в 2006 г.

24–26 сентября 2008 г. на базе Пермского государственного педагогического университета состоялся XXVII Всероссийский семинар преподавателей математики университетов и педагогических вузов «Проблемы многоуровневой подготовки учителей математики для современной школы», посвященный 70-летию со дня рождения профессора И. Д. Пехлецкого (Рис. 21). До этого семинар состоялся во многих городах России. В 2008 г. Перми выпала честь принимать участников семинара и издать сборник его материалов.

На Рис. 22 представлен титул сборника материалов названного семинара, в подготовке которого кафедра математического анализа принимала активное участие. Научный руководитель семинара, доктор педагогических наук, профессор, Заслуженный деятель науки РФ Александр Григорьевич Мордкович выступил соавтором статьи о научной и педагогической деятельности И. Д. Пехлецкого (Рис. 22).

Рис. 21. Преподаватели кафедры математического анализа в 2008 г.

К настоящему времени количество такого рода сборников, изданных в разных городах России, равно 40; в Брянске 7–9 октября 2021 г. состоялся 40-й Международный научный семинар преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов «Развитие общего и профессионального математического образования в системе национальных университетов и педагогических вузов».

Вплоть до слияния кафедры математического анализа с другими математическими кафедрами в 2011 году кафедра обеспечивала преподавание базовых учебных курсов по направлению «Физико-математическое образование» (бакалавриат и магистратура) и по специальности «Математика с дополнительной специальностью информатика» для студентов математического факультета дневного и заочного отделений.

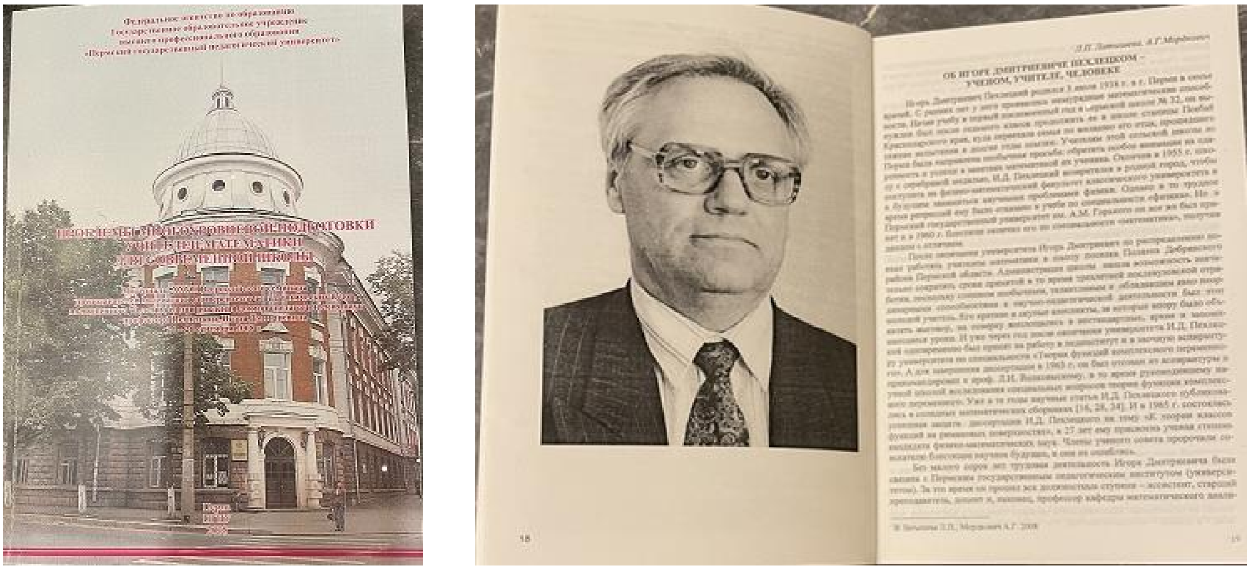


Рис. 22. Титул сборника и начальная страница статьи о профессоре И. Д. Пехлецком

Преподаватели кафедры осуществляли руководство педагогической практикой студентов, курсовыми и выпускными квалификационными работами, а также магистерскими диссертациями, возглавляли учебно-исследовательскую работу студентов в кружках и проблемных группах. Все члены кафедры во все периоды ее функционирования являлись квалифицированными специалистами, владели методикой работы в вузе, активно повышали свой научно-методический уровень.

Таким образом, в год 100-летия нашего университета можно отметить, что кафедра математического анализа благодаря неустанному труду ее преподавателей со времени ее создания всегда занимала достойное место в вузе.

Список литературы

1. Биографический словарь профессоров и преподавателей Пермского государственного педагогического университета : справочник / сост. Е. В. Ветлугина; под ред. И. С. Капцуговича. Пермь : Пермский государственный педагогический университет, 2001. 416 с.

2. Пермский университет. Классика будущего. URL: http://www.psu.ru/fakultety/mekhaniko-matematicheskij-fakultet/nashi-vypuskniki/igor-dmitrievich-pekhletskij (дата обращения: 22.08.2021).

Department of Mathematical Analysis of Perm Pedagogical University and its teachers

Latysheva L. P.
PhD in Pedagogical Sciences,
associate professor of the Department of Higher Mathematics and Methods of Teaching Mathematics,
Perm State Humanitarian Pedagogical University. Russia, Perm. E-mail: lublat@mail.ru

Abstract. In connection with the anniversary date – the centenary of the founding of Perm Humanitarian Pedagogical University - it is important to realize what stages of formation and development its departments have passed, and what contribution they have made to the common cause of higher professional pedagogical education. In this article, these aspects are revealed in relation to the oldest department of mathematical analysis in the university. Interesting information is given from the life, pedagogical and research activities of its teachers who worked at different times at various faculties of the pedagogical university.

Keywords: Perm Pedagogical Institute, Perm Pedagogical University, Department of Mathematical Analysis, mathematical education, teacher training, mathematical analysis, teaching mathematics, research work.

References

1. *Biograficheskij slovar' professorov i prepodavatelej Permskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta : spravochnik* – Biographical dictionary of professors and teachers of Perm State Pedagogical University : handbook / comp. E. V. Vetlugin; ed. by I. S. Kaptsugovich. Perm. Perm State Pedagogical University. 2001. 416 p.

2. *Permskij universitet. Klassika budushchego* – Perm University. Classics of the future. Available at: http://www.psu.ru/fakultety/mekhaniko-matematicheskij-fakultet/nashi-vypuskniki/igor-dmitrievich-pekhletskij (date accessed: 08/22/2021).

Математический вестник Вятского государственного университета

Научный журнал № 4 (23) (2021)

16+

Вятский государственный университет,
610000, г. Киров, ул. Московская, 36
(8332) 208-964