УДК 37.016:512 DOI 10.25730/VSU.0536.22.032

Учебные пособия по алгебре для студентов младших курсов – разработка и опыт использования

Еловикова Юлия Александровна
кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Брянский государственный университет им. академика И. Г. Петровского. Россия, г. Брянск. ORCID: 0000-0003-3066-7984. E-mail: elov77@yandex.ru

Аннотация. Излагаются идеи разработки учебных пособий по базовым курсам алгебры: «Основы общей алгебры», «Теория многочленов», «Линейная алгебра». При этом одна из основных задач – сделать материал максимально доступным для восприятия студентами 1-го и 2-го курсов. Особое внимание уделяется методической переработке лекционного материала, его структурированию, детализации. Предлагается методика работы с подготовленными учебными пособиями, анализируется опыт их практического использования на кафедре математического анализа, алгебры и геометрии Брянского государственного университета. Авторы серии учебных пособий надеются, что их разработка поможет студентам младших курсов адаптироваться к новым условиям обучения, а преподавателям – успешно решить ряд методических проблем при преподавании высшей алгебры.

Ключевые слова: учебные пособия, алгебра общая, линейная, теория многочленов.

Требования к преподаванию математических дисциплин в вузе в последнее время существенно меняются. Это происходит как в связи с развитием науки, технологий, средств коммуникации в обществе, так и в связи с чрезвычайными обстоятельствами, в частности, пандемией и самоизоляцией. В целях формирования у студентов компетенций, предусмотренных ФГОС ВО, изменяются принципы организации учебного процесса, увеличивается объем самостоятельной работы студентов.

В связи с этим при преподавании базовых математических дисциплин в вузе можно отметить следующие общеизвестные трудности:

– низкий уровень готовности студентов младших курсов к восприятию теоретического материала;

– уменьшение количества аудиторных часов, отведенных в новых учебных планах на практические и особенно на лекционные занятия;

– необходимость дистанционного и самостоятельного изучения отдельных частей курса в зависимости от обстоятельств.

Перечисленные сложности наблюдаются в том числе в ходе преподавания алгебраических дисциплин «Основы общей алгебры», «Теория многочленов», «Линейная алгебра» на первом и втором курсах студентам педагогического направления на кафедре математического анализа, алгебры и геометрии Брянского государственного университета. Эффективная работа по решению этих проблем необходима, поскольку указанные дисциплины содержат основы важнейших разделов современной алгебры. Их изучение способствует формированию общей математической культуры выпускника, необходимой будущему учителю для понимания как основного курса математики, так и школьных элективных курсов. Глубокая теоретическая подготовка, умение работать с понятийным аппаратом, с математическим доказательством, сформированное в ходе изучения теоретического курса алгебры, позволяют выпускникам бакалавриата успешно продолжить обучение в магистратуре, в том числе по классическим математическим направлениям.

В течение трех лет авторским коллективом в составе Еловиковой Ю. А., Сорокиной М. М., Корпачевой М. А. разрабатывались методические материалы по курсу алгебры для студентов направления 44.03.01 «Педагогическое образование», профиль (направленность) «Математика». В основу был положен опыт проведения лекционных и практических занятий со студентами физико-математического факультета БГУ на протяжении более двух десятилетий, с учетом традиций изложения разделов алгебры, сложившихся на кафедре алгебры БГУ под руководством профессора Виктора Александровича Ведерникова. Итогом работы явилась публикация трех учебных пособий по трем разделам алгебры: «Основы общей алгебры» [4], «Теория многочленов» [5] и «Линейная алгебра» [6].

При подготовке учебных пособий [4–6] авторами была поставлена цель не только изложить основные разделы курса алгебры достаточно полно, логично и обоснованно, но и сделать материал максимально доступным для восприятия студентами младших курсов. Наряду с классическими учебниками по высшей алгебре, такими как [7–9], авторы ориентировались в том числе на серию учебников по алгебре, подготовленных Московским государственным заочным педагогическим институтом для студентов-заочников [1–3]. Подробное изложение доказательства теорем, большое количество примеров и задач, иллюстрирующих теоретические понятия, сделало в свое время эти учебники популярными, «понятными» и удобными для самостоятельного изучения материала.

Теоретическая часть каждого учебного пособия [4–6] содержит лекционный материал, методически переработанный и подготовленный для применения эффективных приемов смыслового чтения. В частности, сделан акцент на существенные признаки понятий, четко выявлена структура определений, структура формулировок теорем, с помощью нумерации и ссылок установлены связи по выделенной структуре с предыдущими и последующими определениями и утверждениями (рисунок 1). В доказательстве теорем явно выделена идея и приемы доказательства, его этапы и шаги (рисунок 2).

Опыт последующей работы с учебными пособиями на лекциях показал, что уровень детализации изложения теории позволяет студентам использовать этот текст в качестве готового конспекта, не записывая на лекции большие фрагменты материала вслед за лектором. В эпоху цифровизации вместо работы с мелом и доской все чаще используются технические средства, а вместо копирования с помощью бумаги и ручки – электронные носители информации. Методика чтения лекций по готовым конспектам, на наш взгляд, является шагом в этом направлении.

Студенты на лекции в процессе диалога с преподавателем выделяют основную мысль текста, устанавливают логические связи в рассуждениях и связи с ранее рассмотренным материалом. При этом делаются краткие пометки в готовых распечатанных конспектах, материал иллюстрируется примерами на полях, на обороте листа. Таким образом, студенты освобождены от работы по механическому переписыванию текста с доски. Такое переписывание часто делается без осмысления, в связи с нехваткой времени при высоком темпе рассмотрения материала.

В то же время в ходе работы выявлен ряд недостатков этой методики. Поскольку текст не записан на доске, сложно привлечь внимание к отдельному его фрагменту, формуле, указать на определенные элементы. Здесь может помочь демонстрация текста лекций на экране с помощью презентации, с постепенным появлением обсуждаемых фрагментов.

Также к недостаткам можно отнести то, что при наличии готового конспекта на лекции не используется эффективный методический прием осмысленного конспектирования с выделением основной мысли, структурированием материала. Отчасти это компенсируется тем, что студент после лекции готовится к отчету по изученной теории, так называемому математическому диктанту, в начале каждого практического занятия. В ходе диктанта студент в письменной форме излагает формулировки определений и теорем, алгоритмы решения задач.

Проведение лекций с использованием текста учебных пособий позволило ускорить темп рассмотрения учебного материала в аудитории, за счет чего увеличить объем материала, который студенты рассматривают в диалоге с преподавателем. После этого студенты успешнее работают над теоретическими разделами, заданными для самостоятельного изучения. Промежуточный контроль (экзамен, собеседование) показывает достаточно глубокое понимание учащимися сути математических определений, логики рассуждений, осознание важности строгого обоснования каждого вывода при доказательстве. По отзывам студентов, изучение теории стало комфортнее и «понятнее».

Вторая часть каждого учебного пособия, практическая, – содержит варианты типовых практических заданий и подробные образцы их решения, что позволяет использовать учебное пособие на практических занятиях, а также при самостоятельной подготовке студентов к учебным занятиям, контрольным работам, итоговому тестированию, экзамену. При оформлении образцов решения задач учтены требования к формированию умений. В частности, четко выделены этапы выполнения действия или его алгоритм, этапы сформулированы в общем виде, обоснование каждого этапа приведено в теоретической части пособия, а образец решения задачи содержит ссылки на соответствующие определения и теоремы (рисунок 3).

■ **Теорема 17.2** (свойство симметричного элемента). *Пусть* $\circ$ *– бинарная алгебраическая операция на множестве* $M \neq \varnothing$, *e – нейтральный элемент в M относительно операции* $\circ$. *Если операция* $\circ$ *ассоциативна на M, и в M для элемента* $a \in M$ *существует симметричный элемент, то он единственный.*

► **Доказательство.** Пусть a' и a'' – симметричные элементы для элемента $a \in M$, a', $a'' \in M$. Покажем, что $a' = a''$.

Так как a' симметричный элемент для элемента a относительно операции $\circ$, то, по определению 17.4, $a \circ a' = a' \circ a = e$ (1).

Так как a'' симметричный элемент для элемента a относительно операции $\circ$, то, по определению 17.4, $a \circ a'' = a'' \circ a = e$ (2).

Тогда a' = (по опр.17.3) = $a' \circ e$ = (из (2)) = $a' \circ (a \circ a'')$ = (ассоциативность $\circ$) = $(a' \circ a) \circ a''$ = (из(1)) = $e \circ a''$ = (по опр.17.3) = a''. Теорема доказана.

Рис. 1. Фрагмент детализированного доказательства [4, с. 35]

■ **Теорема 7.1 (о делении с остатком для многочленов).** *Пусть* F *– поле,* $f(x)$, $g(x) \in F[x]$, $g(x) \neq 0$. *Тогда существуют единственные многочлены* $q(x)$, $r(x) \in F[x]$ *такие, что*

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x), \text{ причем } \deg r(x) < \deg g(x). \qquad (1)$$

При этом $q(x)$ называется *неполным частным*, а $r(x)$ – *остатком* при делении $f(x)$ на $g(x)$.

► **Доказательство.**

1. Существование.

Если $f(x) = 0$, то (1) верно и имеет вид $0(x) = g(x) \cdot 0(x) + 0(x)$, то есть $q(x) = 0$ и $r(x) = 0$, причем $\deg r(x) = -\infty < \deg g(x)$, ввиду $g(x) \neq 0$.

Пусть $f(x) \neq 0$.

Если $\deg f(x) < \deg g(x)$, справедливо $f(x) = g(x) \cdot 0(x) + f(x)$, то есть в (1) необходимо взять $q(x) = 0$, $r(x) = f(x)$, причем $\deg r(x) = \deg f(x) < \deg g(x)$.

Пусть $\deg f(x) \geq \deg g(x)$. Тогда $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, $a_n \neq 0$, $g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$, $b_m \neq 0$, $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $n \geq m$. Доказательство проведем методом математической индукции по параметру n.

1) Пусть $n = \deg f(x) = 0$. Тогда $f(x) = a_0$. Так как $m \leq n = 0$ и $m = \deg g(x) \neq -\infty$, то $m = 0$ и $g(x) = b_0$. Так как F – поле и $b_0 \neq 0$, то существует $b_0^{-1} \in F$. Тогда $\underbrace{a_0}_{f(x)} = \underbrace{b_0}_{g(x)} \cdot \underbrace{b_0^{-1} \cdot a_0}_{q(x)} + \underbrace{0}_{r(x)}$, причем $\deg r(x) = -\infty < 0 = \deg g(x)$.

2) Пусть $\deg f(x) = n > 0$. Предположим, что утверждение верно для любого многочлена степени, меньшей n, а именно: любой многочлен степени, меньшей n, имеет представление вида (1), то есть делится на $g(x)$ с остатком.

Рис. 2. Фрагмент детализированного доказательства [5, с. 16]

■ **Задание 12.**

Можно ли в векторном пространстве $V_3=\mathbb{R}^3$ задать скалярное умножение $\overline{x}\cdot\overline{y}$ векторов $\overline{x}=(x_1,x_2\,x_3)$ и $\overline{y}=(y_1,y_2\,y_3)$ с помощью указанной формулы? Если да, то является ли скалярное умножение положительно определенным?

$$\overline{x}\cdot\overline{y}=x_1y_1+2x_2y_2+7x_3y_3 \qquad (1)$$

► **Решение:**

Согласно определению 28.1, для того чтобы формула (1) задавала скалярное умножение, должны выполняться условия:

1) $\forall\overline{a},\overline{b}\in V_3,\ \overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$ – симметричность;

2) $\forall\overline{a},\overline{b},\overline{c}\in V_3,\ (\overline{a}+\overline{b})\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}$ − дистрибутивность;

3) $\forall\overline{a},\overline{b}\in V_3,\ \forall\alpha\in P,\ (\alpha\overline{a})\cdot\overline{b}=\alpha(\overline{a}\cdot\overline{b})$ − ассоциативность.

Проверим выполнимость условий 1) – 3).

1) Пусть $\overline{x}=(x_1,x_2\,x_3)$, $\overline{y}=(y_1,y_2\,y_3)\in V_3$. Так как $V_3=\mathbb{R}^3$ – арифметическое 3-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, то $x_i,\,y_i\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,3}$. Следовательно, имеем $\overline{x}\cdot\overline{y}=x_1y_1+2x_2y_2+7x_3y_3=y_1x_1+2y_2x_2+7y_3x_3=\overline{y}\cdot\overline{x}$. Таким образом, условие 1) выполняется.

2) Пусть $\overline{x}=(x_1,x_2\,x_3)$, $\overline{y}=(y_1,y_2\,y_3)$, $\overline{z}=(z_1,z_2,z_3)\in V_3$. Тогда

$$(\overline{x}+\overline{y})\cdot\overline{z}=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3)\cdot(z_1,z_2,z_3)=$$

$$=(x_1+y_1)z_1+2(x_2+y_2)z_2+7(x_3+y_3)z_3=$$

$$=(x_1z_1+2x_2z_2+7x_3z_3)+(y_1z_1+2y_2z_2+7y_3z_3)=\overline{x}\cdot\overline{z}+\overline{y}\cdot\overline{z}.$$

Следовательно, условие 2) справедливо.

Рис. 3. Фрагмент образца решения практического задания [6, с. 122]

Варианты практических заданий для самостоятельного решения представляют собой систему упражнений для отработки алгоритмов решения типовых задач.

Практическая часть учебных пособий [4–6] в настоящее время успешно используется преподавателями кафедры при проведении летней практики по алгебре, при работе со студентами заочной формы обучения, со студентами, которые пропустили аудиторные занятия и учатся решать задачи самостоятельно. Все это позволяет совершенствовать уже имеющиеся материалы и методику работы с ними.

Первые шаги изучения высшей математики в вузе вызывают трудности у студента, недавно закончившего обучение в школе. Непривычными для него являются лекционно-семинарская схема организации учебного процесса, большой объем самостоятельной работы, усиленное внимание к теории и математическому доказательству, лаконичный стиль изложения материала в классических учебниках для высшей школы. Преподаватель часто встречается, как на занятиях, так и на интернет-форумах, с просьбой порекомендовать «понятный» учебник по тому или иному разделу высшей математики. Авторы надеются, что серия подготовленных ими учебных пособий наряду со многими другими методическими разработками коллег поможет студентам младших курсов адаптироваться к новым условиям обучения, а преподавателям – успешно решить ряд методических проблем при преподавании высшей алгебры.

Список литературы

1. *Варпаховский Ф. Л., Солодовников А. С., Стеллецкий И. В.* Алгебра. Группы, кольца, поля. Векторные и евклидовы пространства. Линейные отображения. М. : Просвещение, 1978.

2. *Варпаховский Ф. Л., Солодовников А. С.* Алгебра. Элементы теории множеств. Линейные уравнения и неравенства. Арифметические векторы. Матрицы и определители. М. : Просвещение, 1981.

3. *Винберг Э. Б.* Алгебра многочленов. М. : Просвещение, 1980.

4. *Еловикова Ю. А., Сорокина М. М.* Основы общей алгебры : учеб. пособие для студентов направления подготовки бакалавров 44.03.01 Педагогическое образование, профиль Математика. Брянск : Полиграм плюс, 2018.

5. *Еловикова Ю. А., Сорокина М. М.* Теория многочленов : учеб. пособие для студентов направления подготовки бакалавров 44.03.01 Педагогическое образование, профиль Математика. Брянск : Полиграм плюс, 2020.

6. *Еловикова Ю. А., Корпачева М. А., Сорокина М. М.* Линейная алгебра : учеб. пособие для студентов направления подготовки бакалавров 44.03.01 Педагогическое образование, профиль Математика. Брянск : Полиграм плюс, 2019.

7. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру : в 3-х ч. Ч. 1: Основы алгебры : учебник. М. : МЦНМО, 2018.

8. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру : в 3-х ч. Ч. 2: Линейная алгебра : учебник. М. : МЦНМО, 2018.

9. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру : в 3-х ч. Ч. 3: Основные структуры алгебры : учебник. М. : МЦНМО, 2018.

Algebra textbooks for undergraduates – development and use experience

Yelovikova Yulia Aleksandrovna

PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor, associate professor of the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, Bryansk State Academician I. G. Petrovsky University.
Russia, Bryansk. ORCID: 0000-0003-3066-7984. E-mail: elov77@yandex.ru

Abstract. The ideas of developing textbooks on basic algebra courses are presented: "Fundamentals of General Algebra", "Theory of polynomials", "Linear Algebra". At the same time, one of the main tasks is to make the material as accessible as possible for students of the 1st and 2nd courses. Special attention is paid to the methodical processing of lecture material, its structuring, detailing. The methodology of working with the prepared textbooks is proposed, the experience of their practical use at the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry of Bryansk State University is analyzed. The authors of a series of textbooks hope that their development will help junior students adapt to new learning conditions, and teachers will successfully solve a number of methodological problems when teaching higher algebra.

Keywords: textbooks, general algebra, linear, theory of polynomials.

References

1. *Varpahovskij F. L., Solodovnikov A. S., Stelleckij I. V. Algebra. Gruppy, kol'ca, polya. Vektornye i evklidovy prostranstva. Linejnye otobrazheniya* [Algebra. Groups, rings, fields. Vector and Euclidean spaces. Linear mappings]. M. Prosveshchenie (Enlightenment). 1978.

2. *Varpahovskij F. L., Solodovnikov A. S. Algebra. Elementy teorii mnozhestv. Linejnye uravneniya i neravenstva. Arifmeticheskie vektory. Matricy i opredeliteli* [Algebra. Elements of set theory. Linear equations and inequalities. Arithmetic vectors. Matrices and determinants]. M. Prosveshchenie (Enlightenment). 1981.

3. *Vinberg E. B. Algebra mnogochlenov* [Algebra of polynomials]. M. Prosveshchenie (Enlightenment). 1980.

4. *Elovikova Yu. A., Sorokina M. M. Osnovy obshchej algebry : ucheb. posobie dlya studentov napravleniya podgotovki bakalavrov 44.03.01 Pedagogicheskoe obrazovanie, profil' Matematika* [Fundamentals of general algebra : textbook for students of bachelor's degree 44.03.01 Pedagogical education, Mathematics profile]. Bryansk. Polygram Plus. 2018.

5. *Elovikova Yu. A., Sorokina M. M. Teoriya mnogochlenov : ucheb. posobie dlya studentov napravleniya podgotovki bakalavrov 44.03.01 Pedagogicheskoe obrazovanie, profil' Matematika* [Theory of polynomials : textbook for students of bachelor's degree 44.03.01 Pedagogical education, Mathematics profile]. Bryansk. Polygram Plus. 2020.

6. *Elovikova Yu. A., Korpacheva M. A., Sorokina M. M. Linejnaya algebra : ucheb. posobie dlya studentov napravleniya podgotovki bakalavrov 44.03.01 Pedagogicheskoe obrazovanie, profil' Matematika* [Linear Algebra : textbook for students of bachelor's degree 44.03.01 Pedagogical education, Mathematics profile]. Bryansk. Polygram Plus. 2019.

7. *Kostrikin A. I. Vvedenie v algebru : v 3-h ch. Ch. 1: Osnovy algebry : uchebnik* [Introduction to Algebra : in 3 parts. Part 1: Fundamentals of Algebra : textbook]. M. ICNMO. 2018.

8. *Kostrikin A. I. Vvedenie v algebru : v 3-h ch. Ch. 2: Linejnaya algebra : uchebnik* [Introduction to Algebra : in 3 parts. Part 2: Linear Algebra : textbook]. M. ICNMO. 2018.

9. *Kostrikin A. I. Vvedenie v algebru : v 3-h ch. Ch. 3: Osnovnye struktury algebry : uchebnik* [Introduction to algebra : in 3 parts. Part 3: Basic structures of algebra : textbook]. M. ICNMO. 2018.