

О системе подготовительных упражнений для решения задач на построение в пространстве

Леонтьева Наталия Владимировна

кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и информатики,
Глазовский государственный педагогический институт им. В. Г. Короленко.
Россия, г. Глазов. ORCID: 0000-0001-9716-907X. E-mail: leonteva-natalia-0812@yandex.ru

Аннотация. Изучение конструктивной геометрии в пространстве предполагает знакомство с основными инструментами и базовыми построениями. Обучение решению задач требует предварительной подготовки. В связи с этим возникает необходимость в создании дополнительных заданий. Цель работы состоит в описании системы упражнений, направленных на подготовку обучающихся к решению задач на построение в пространстве. С их помощью формируются у обучающихся представления о возможностях инструментов пространственных построений. Основное внимание при этом следует уделять рассмотрению различных случаев, при которых можно выполнить построение. Применение базовых построений дополняет основные инструменты. Кроме того, решение подобных упражнений дает возможность понять логику выполнения основных действий над построенными объектами. Умение применять инструменты и базовые построения создает основы для дальнейшего обучения решению задач на построение в пространстве.

Ключевые слова: конструктивная геометрия в пространстве, задачи на построение в пространстве, инструменты построений, базовые построения, система упражнений.

Одним из наиболее сложных разделов школьного курса математики является стереометрия. В соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом обучающиеся должны владеть основными понятиями о пространственных фигурах, их основных свойствах, уметь распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры [3]. Составной частью такой подготовки является обучение конструктивной геометрии. В школьный курс включаются вопросы обучения решению задач на построение на плоскости.

Задачи на построение, как отмечает В. А. Далингер, способствуют формированию логического мышления, пространственных представлений, алгоритмической культуры [1, с. 40]. Их включение в школьный курс геометрии способствует формированию умений решать геометрические задачи. Соответственно изучение аналогичных вопросов в рамках курса стереометрии дает возможность совершенствовать геометрические представления обучающихся. Однако в курсе стереометрии подобные вопросы практически не рассматриваются. В связи с этим изучение указанной темы возможно в рамках дополнительных элективных курсов.

Базовая основа конструктивной геометрии в пространстве описана в работе [2]. За основу в соответствии с предложенными автором идеями выберем следующие инструменты: линейку, плоскограф и сферограф. После их изучения введем в рассмотрение основные действия над построенными объектами, которые будем называть базовыми построениями. К их числу отнесем [2, с. 24]:

- Б1 (можно выбрать произвольную точку, принадлежащую построенной фигуре);
- Б2 (можно выбрать произвольную точку, не принадлежащую построенной фигуре);
- Б3 (можно выбрать любое конечное число точек, принадлежащее пересечению двух построенных фигур);
- Б4 (можно построить линию пересечения двух плоскостей);
- Б5 (можно построить линию пересечения плоскости и сферы);
- Б6 (можно построить линию пересечения двух сфер).

Опираясь на выделенные инструменты и базовые построения, мы можем решать различные задачи. Однако в процессе обучения возникает вопрос о том, каким образом можно ввести указанные выше понятия, чтобы в дальнейшем было проще обучать школьников решению задач на построение в пространстве.

При изучении основных инструментов и базовых построений следует учитывать два основных момента. Во-первых, они могут быть введены фактически как аксиомы, что предполагает принятие данных утверждений без обоснования. Во-вторых, пространственные инструменты не имеют физического воплощения и могут быть реализованы только в виде мысленного эксперимента. При их использовании мы не просто говорим о существовании полученных в результате объектов, а предполагаем, что они могут быть воплощены в некотором виртуальном пространстве.

Построения на плоскости реализуемы в силу физического существования соответствующих инструментов. Для пространственного случая цифровое моделирование, основанное на применении прикладных математических пакетов. В частности, программа GeoGebra дает возможность продемонстрировать, как могут выглядеть результаты применения линейки, плоскографа и сферографа, что позволяет визуализировать результаты построения, а также показать результаты применения базовых построений.

Прежде чем, собственно, переходить к решению задач, желательно выполнить с обучающимися ряд предварительных упражнений, позволяющих лучше понять базовые основы пространственных построений.

В первую очередь желательно разобрать с обучающимися различные случаи, определяющие возможность построения объектов с помощью инструментов. С этой целью можно им предложить следующие упражнения.

1. В пространстве даны 4 точки A, B, C, D , не лежащие в одной плоскости. Проведите через них всевозможные прямые. Сколько прямых можно построить?

2. В условиях предыдущей задачи проведите через данные точки всевозможные плоскости. Сколько плоскостей можно провести?

3. Даны три точки A, B, C . Проведите сферы так, чтобы одна из точек была ее центром, а радиус был равен длине отрезка, образованного двумя другими. Сколько сфер, удовлетворяющих таким условиям, можно провести?

Данные упражнения можно выполнить мысленно, для этого достаточно назвать основные объекты, которые получаются при построении. При их выполнении важно подчеркнуть, что в пространстве в силу виртуальности применяемых инструментов указание на искомый объект можно рассматривать как факт выполнения построения этого объекта. Так, в первом упражнении обучающиеся могут считать построенными следующие шесть прямых: AB, AC, AD, BC, BD, CD .

Визуализировать решение данной задачи можно с помощью пакета GeoGebra. Для этого достаточно выбрать четыре произвольные точки и провести через них прямые (рисунок 1).

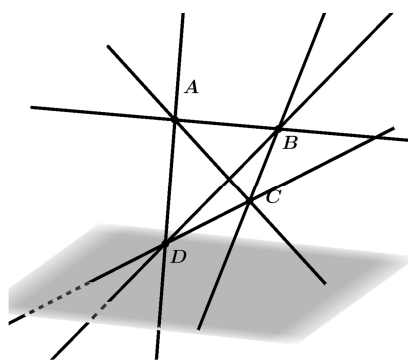


Рис. 1. Возможный случай расположения прямых в пространстве

Возможности программы позволяют продемонстрировать процесс построения, рассмотреть результат с различных ракурсов. Созданный учителем шаблон демонстрируется учащимся только после того, как задача будет решена. В таком случае компьютерная модель служит иллюстрацией, позволяющей подтвердить сделанные предположения.

Следующая серия упражнений направлена на расширение различных случаев применения инструментов, описанных в работе [2]. Особое внимание обучающихся следует обратить на плоскограф. В этом случае можно предложить следующие упражнения.

4. В пространстве даны $AB \parallel CD$, AM скрещивается с прямой CD (рисунок 2). Какие плоскости в таких условиях можно провести?

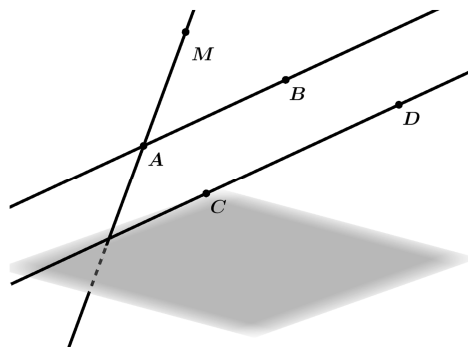


Рис. 2. Исходные данные к заданию

5. Проведите через четыре данные точки A, B, C, D , не лежащие в одной плоскости, всевозможные сферы так, чтобы одна из точек была центром, а вторая лежала на ее поверхности. Сколько сфер можно провести?

Построение пространственных объектов желательно сопровождать пояснениями, обосновывающими такую возможность. В частности, обратим внимание учащихся на то, что по определению параллельности прямых AB и CD через них можно провести плоскость.

Изменение конфигурации исходных объектов позволяет составлять различные упражнения, направленные на понимание тех случаев, когда применение инструментов дает возможность провести пространственные фигуры. Умение видеть условия, при которых построение возможно, представляет собой основу для дальнейшего решения задач.

Следующая серия упражнений направлена на формирование умений применять базовые построения. К их числу отнести такие задачи.

6. Дана плоскость ABC . Выберите точку M , лежащую в этой плоскости, а также точку N , не лежащую в ней. Проведите прямую MN . Проведите плоскости ABN , CMN . Пересекаются ли данные в задаче плоскости? Пересекаются ли прямая AB и плоскость CMN ?

7. Из точки K на плоскость ABC опущен перпендикуляр, основанием которого является точка H . Постройте сферы $\Omega_1(A, AK)$, $\Omega_2(K, KH)$. Определите, пересекаются ли данные сферы друг с другом и плоскостью ABC ?

8. В условиях предыдущей задачи определите, пересекает ли прямая AN данные сферы?

При решении данных задач основное внимание следовало уделить обоснованию того, пересекаются указанные объекты или нет. Для этого необходимо вспомнить условия, позволяющие определить, пересекаются объекты или нет.

В процессе выполнения подобных упражнений у обучающихся формируются представления о применении инструментов и базовых построений, что формирует основы для дальнейшего обучения решению задач на построение в пространстве. Кроме того, с их помощью школьники учатся проводить доказательство того, что построенные объекты удовлетворяют заданным условиям.

Список литературы

1. Далингер В. А. Геометрия: планиметрические задачи на построение : учеб. пособие для вузов. М. : Юрайт, 2021. 155 с. URL: <https://urait.ru/bcode/473822> (дата обращения: 10.06.2022).

2. Леонтьева Н. В. Теоретические основы конструктивной геометрии в пространстве // Преподавание математики и информатики в школах и вузах: проблемы содержания, технологии и методики : сб. научных и научно-практических статей VII Всероссийской научно-практической конференции (26–27 ноября 2021 г.) / науч. ред. Е. М. Вечтомов, отв. ред. И. В. Владыкина, Н. В. Леонтьева; Глазовский государственный педагогический институт. Глазов : ГПИ, 2022. С. 19–25.

3. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования. URL: http://school6.tgl.ru/uploads/files/documents/fgos/fgos_coo_11_12_2020.pdf (дата обращения: 10.06.2022).

About the system of preparatory exercises for solving construction tasks in space

Leontieva Natalia Vladimirovna

PhD in Pedagogical Sciences, associate professor of the Department of Mathematics and Computer Science, Glazovsky State Pedagogical Institute n. a. V. G. Korolenko.
Russia, Glazov. ORCID: 0000-0001-9716-907X. E-mail: leonteva-natalia-0812@yandex.ru

Abstract. The study of constructive geometry in space involves familiarity with basic tools and basic constructions. Learning to solve problems requires prior preparation. In this regard, there is a need to create additional tasks. The purpose of the work is to describe a system of exercises aimed at preparing students to solve construction tasks in space. With their help, students form ideas about the possibilities of spatial construction tools. The main attention should be paid to the consideration of various cases in which the construction can be performed. The use of basic constructions complements the basic tools. In addition, solving such exercises makes it possible to understand the logic of performing basic actions on constructed objects. The ability to use tools and basic constructions creates the basis for further training in solving problems for building in space.

Keywords: constructive geometry in space, construction tasks in space, construction tools, basic constructions, exercise system.

References

1. Dalingер V. A. *Geometriya: planimetricheskie zadachi na postroenie : ucheb. posobie dlya vuzov* [Geometry: planimetric problems for construction : textbook. manual for universities]. M. Yurayt. 2021. 155 p. Available at: <https://urait.ru/bcode/473822> (date accessed: 10.06.2022).
2. Leont'eva N. V. *Teoreticheskie osnovy konstruktivnoj geometrii v prostranstve* [Theoretical foundations of constructive geometry in space] // *Prepodavanie matematiki i informatiki v shkolah i vuzah: problemy sodержaniya, tekhnologii i metodiki : sb. nauchnyh i nauchno-prakticheskikh statej VII Vserossijskoj nauchno-prakticheskoy konferencii (26–27 noyabrya 2021 g.)* – Teaching mathematics and computer science in schools and universities: problems of content, technology and methodology : collection of scientific and scientific-practical articles of the VII All-Russian Scientific-practical Conference (November 26–27, 2021) / scient. ed. E. M. Vechtomov, ed. I. V. Vladykina, N. V. Leontieva; Glazovsky State Pedagogical Institute. Glazov. GSPI. 2022. Pp. 19–25.
3. Federal State educational standard of secondary general education. Available at: http://school6.tgl.ru/uploads/files/documents/fgos/fgos_coo_11_12_2020.pdf (date accessed: 10.06.2022) (in Russ.).