

№4 (27) 2022

ISSN: 2782-2672

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК Вятского государственного университета

MATHEMATICAL BULLETIN of Vyatka State University

Вятский государственный университет

**Математический вестник
Вятского государственного
университета**

Н а у ч н ы й ж у р н а л

№ 4 (27)

Киров
2022

Главный редактор

Е. М. Вечтомов, доктор физико-математических наук, профессор,
Вятский государственный университет (г. Киров), ORCID: 0000-0002-3490-2956

Заместители главного редактора

С. И. Калинин, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор,
Вятский государственный университет (г. Киров), ORCID: 0000-0001-5439-9414;

Д. Е. Прозоров, доктор технических наук, профессор, Вятский государственный университет (г. Киров), ORCID: 0000-0002-3577-8838

Ответственный секретарь

В. И. Варанкина, кандидат физико-математических наук, доцент,
Вятский государственный университет (г. Киров), ORCID: 0000-0003-4166-1182

Состав редакционной коллегии:

Н. А. Беляева, доктор физико-математических наук, доцент, Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина (г. Сыктывкар);

Н. А. Бояринцева, кандидат педагогических наук, доцент, Вятский государственный университет (г. Киров);

Ю. А. Дробышев, доктор педагогических наук, профессор, Калужский филиал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации (г. Калуга);

И. В. Игнатушина, доктор педагогических наук, доцент, Оренбургский государственный педагогический университет (г. Оренбург);

С. Н. Ильин, кандидат физико-математических наук, доцент, Казанский (Приволжский) федеральный университет (г. Казань);

Г. А. Клековкин, кандидат физико-математических наук, доцент (г. Самара);

И. Б. Кожухов, доктор физико-математических наук, профессор, Национальный исследовательский университет «МИЭТ» (г. Москва), ORCID: 0000-0002-1918-6197;

Е. В. Котельников, доктор технических наук, доцент, Вятский государственный университет (г. Киров), ORCID: 0000-0001-9745-1489;

Е. Н. Лубягина, кандидат физико-математических наук, доцент, Вятский государственный университет (г. Киров), ORCID: 0000-0001-5071-6208;

А. А. Махнев, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН (г. Екатеринбург);

Н. Н. Непейвода, доктор физико-математических наук, профессор, Институт программных систем РАН (г. Переславль-Залесский), ORCID: 0000-0002-7869-8053;

В. П. Одинец, доктор физико-математических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург);

С. М. Окулов, доктор педагогических наук, кандидат технических наук, профессор, Вятский государственный университет (г. Киров);

Е. А. Перминов, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, доцент, Российский государственный профессионально-педагогический университет (г. Екатеринбург);

Н. И. Петров, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, доцент, Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина (г. Сыктывкар);

В. В. Сидоров, кандидат физико-математических наук, доцент, Вятский государственный университет (г. Киров), ORCID: 0000-0002-7303-4485;

И. М. Смирнова, доктор педагогических наук, профессор, Московский педагогический государственный университет (г. Москва);

О. А. Сотникова, доктор педагогических наук, доцент, Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина (г. Сыктывкар);

Т. Н. Суворова, доктор педагогических наук, доцент, Московский городской педагогический университет (г. Москва);

В. А. Тестов, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, Вологодский государственный университет (г. Вологда);

А. А. Фомин, доктор физико-математических наук, профессор, Московский педагогический государственный университет (г. Москва);

В. В. Черных, доктор физико-математических наук, доцент, Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина (г. Сыктывкар), ORCID: 0000-0002-8650-4554;

Д. В. Чупраков, кандидат физико-математических наук, доцент, Вятский государственный университет (г. Киров), ORCID: 0000-0003-0042-3700;

А. В. Шатров, доктор физико-математических наук, профессор, Вятский государственный университет (г. Киров);

А. В. Ястребов, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, Ярославский государственный педагогический университет им. К. Д. Ушинского (г. Ярославль)

**Научный журнал «Математический вестник Вятского государственного университета»
как средство массовой информации зарегистрирован в Роскомнадзоре
(Свидетельство о регистрации СМИ Эл № ФС77-80462 от 01 марта 2021 г.)**

Учредитель журнала – ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет»

Адрес издателя: 610000, г. Киров, ул. Московская, 36,

тел. (8332) 208-964 (Научное издательство ВятГУ)

Адрес редакции: 610000, г. Киров, ул. Московская, 36,

тел. (8332) 208-964 (Научное издательство ВятГУ)

Редактор **А. В. Мариева**

Компьютерная верстка **Л. А. Кислицына**

Редактор выпускающий **А. Ю. Егоров**

Ответственный за выпуск **И. В. Смольняк**

Цена свободная

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Заляжных Владимир Васильевич. Аппроксимация процентных точек критерия Гири4

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

<i>Еловикова Юлия Александровна.</i> Учебные пособия по алгебре для студентов младших курсов – разработка и опыт использования	10
<i>Герасименко Петр Васильевич.</i> О методических аспектах определения показателей качества знаний, формируемых студентами по математическим дисциплинам в технических вузах.....	15
<i>Игнатова Ольга Григорьевна, Соколова Анна Николаевна.</i> Предметная неделя по математике как средство развития творческого потенциала школьников.....	20
<i>Леонтьева Наталия Владимировна.</i> О системе подготовительных упражнений для решения задач на построение в пространстве	25
<i>Шубарин Михаил Александрович.</i> Применение языка R при изучении прикладной статистики (для студентов нематематических направлений подготовки)	29

Аппроксимация процентных точек критерия Гири

Заляжных Владимир Васильевич

кандидат технических наук, доцент кафедры стандартизации, метрологии и сертификации,
Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова.
Россия, г. Архангельск. ORCID: 0000-0001-6102-7221. E-mail: zalvladimir@yandex.ru

Аннотация. Критерий Гири является одним из наиболее мощных критериев для проверки гипотезы нормальности распределения. Недостаток его состоит в значительной зависимости процентных точек статистики критерия от объема выборки и величины функции распределения критерия, что осложняет оценку гипотезы нормальности как по допускаемому, так и по достигаемому уровню значимости.

В данной статье методом Монте-Карло получена таблица процентных точек статистики критерия Гири в широких диапазонах объемов выборки и значений функции распределения критерия. По ее данным предложена аппроксимация процентных точек, позволяющая находить их значения с высокой точностью. Это дает возможность без затруднений применять критерий Гири. Показано также, что предлагавшиеся ранее аппроксимации процентных точек неудовлетворительны по точности.

Ключевые слова: критерий Гири, аппроксимация, процентные точки, уровень значимости.

Введение. Для статистического анализа числовых данных весьма желательно описать их распределение какой-либо математической моделью, достаточно хорошо описывающей данные. При этом часто наиболее подходящей моделью является нормальное распределение. Проверку гипотезы о нормальности распределения проводят по тому или иному статистическому критерию. Выбор критерия во многом определяется его мощностью.

По данным [8], одним из наиболее мощных критериев нормальности является критерий Гири, предложенный в [14]. К его преимуществам можно отнести также сравнительную простоту вычислений. Критерий Гири применяется в различных исследованиях [например, 1; 3; 7; 9; 11].

Статистика критерия:

$$d = \frac{1}{ns} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|, \quad (1)$$

где $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, n – объем выборки, x_i – значения выборки.

Критерий двусторонний, гипотеза нормальности не отвергается, если

$$d_{\alpha/2} \leq d \leq d_{1-\alpha/2}, \quad (2)$$

где α – допускаемый (задаваемый) уровень значимости. Значения $\alpha/2$ и $1-\alpha/2$ равны соответствующим значениям F функции распределения критерия Гири.

Часто при проверке гипотез статистическими критериями рассчитывают достигаемый уровень значимости p (или p -value), который более информативен, чем проверка по допускаемому уровню значимости α . Для критерия Гири как двустороннего критерия

$$p = 2\min\{F(n, d), 1 - F(n, d)\}, \quad (3)$$

где $F(n, d)$ – значение функции распределения статистики критерия Гири.

Процентные точки $d(n, F)$ статистики (1) для некоторых n и F приведены в [2; 6; 8; 14]. Эти значения сильно зависят от n и F , что осложняет в общем случае оценку по (2), а также нахождение p по (3). Предложены различные аппроксимации $d(n, F)$ нормальным распределением с математическим ожиданием E и дисперсией D . Таким образом,

$$d(n, F) \approx E + u(F) \cdot \sqrt{D},$$

где $u(F)$ – квантиль стандартного нормального распределения. По [12]

$$E = 0,7978845 + \frac{0,199471}{n} + \frac{0,024934}{n^2} - \frac{0,031168}{n^3}$$

$$D = \frac{0,04507}{n} - \frac{0,084859}{n^2} + \frac{0,006323}{n^3}$$
(4)

В соответствии с [13]

$$E = 0,7978845608 + \frac{0,19947114}{n} + \frac{0,02493389}{n^2} - \frac{0,03116737}{n^3}$$

$$D = \frac{0,04507034}{n} + \frac{0,07957747}{n^2} - \frac{0,03978874}{n^3}$$
(5)

В соответствии с [6]

$$E = 0,79788 \frac{n-0,875}{n-1,125}$$

$$D = \frac{1}{n} (0,04507 - \frac{0,0796}{n})$$
(6)

Однако значения $d(n, F)$, полученные по (5), (6), (7), могут существенно отличаться от действительных значений, особенно при сравнительно небольших n , как это указано в [5; 6; 8].

Задачи исследования. В задачи исследования входило получение таблицы процентных точек $d(n, F)$ для статистики d критерия Гири при варьировании функции распределения критерия и объема выборки n в широких пределах, нахождение достаточно точной аппроксимации для полученных табличных значений $d(n, F)$, оценка точности найденной аппроксимации в сравнении с известными, нахождение значений $F(n, d)$ при любых n и d с последующим расчетом достигаемого уровня значимости.

Методика исследования. Таблицу процентных точек получали моделированием методом Монте-Карло [4] в MS Excel, реализуя макрос, содержащий циклическую структуру. Моделировали $N = 2$ млн. выборок из нормального стандартного распределения при каждом исследованном объеме выборки n . По каждой выборке рассчитывали статистику (1). Из полученных массивов статистик (1) находили процентные точки критерия Гири $d(n, F)$. При этом 99,73 %-й доверительный интервал для истинного значения F определяется выражением

$$F \pm 3\sqrt{F(1-F)/N}.$$

Некоторые доверительные интервалы:

0,005±0,00015 0,01±0,0002 0,05±0,0005 0,3±0,001 0,5±0,0011 0,7±0,001 0,95±0,0005 0,99±0,0002 0,995±0,00015.

Аппроксимацию полученных табличных значений, учитывая определенную близость распределений F к нормальным распределениям, получали исходя из функций вида $d = f(u[F])$. Расчеты проводили в MS Excel.

Аппроксимация процентных точек $d(n, F)$. Полученные методом Монте-Карло процентные точки $d(n, F)$ приведены в таблице 1.

Таблица 1

Процентные точки $d(n, F)$ для статистики (1) критерия Гири

n	$F = \alpha/2$								
	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
10	0,6443	0,6632	0,6913	0,7147	0,7408	0,7709	0,7919	0,8093	0,8249
15	0,6630	0,6794	0,7031	0,7229	0,7448	0,7703	0,7880	0,8025	0,8155
20	0,6773	0,6918	0,7126	0,7298	0,7490	0,7713	0,7868	0,7995	0,8111
30	0,6976	0,7094	0,7261	0,7400	0,7557	0,7739	0,7866	0,7971	0,8067
40	0,7104	0,7204	0,7347	0,7467	0,7602	0,7760	0,7869	0,7961	0,8045
50	0,7192	0,7281	0,7409	0,7516	0,7636	0,7776	0,7875	0,7957	0,8032
60	0,726	0,7341	0,7457	0,7553	0,7661	0,7789	0,7879	0,7954	0,8022
70	0,7314	0,7387	0,7493	0,7582	0,7682	0,7800	0,7883	0,7953	0,8016
80	0,7356	0,7424	0,7523	0,7605	0,7699	0,7809	0,7887	0,7952	0,8012
90	0,7392	0,7456	0,7548	0,7626	0,7713	0,7817	0,789	0,7951	0,8008
100	0,7424	0,7484	0,7570	0,7643	0,7726	0,7824	0,7893	0,7952	0,8005
150	0,7526	0,7574	0,7644	0,7702	0,7769	0,7849	0,7905	0,7953	0,7996

Окончание табл. 1

200	0,7587	0,7628	0,7688	0,7738	0,7796	0,7864	0,7913	0,7954	0,7992
300	0,7659	0,7692	0,774	0,7781	0,7828	0,7883	0,7923	0,7957	0,7988
500	0,7731	0,7757	0,7793	0,7825	0,7861	0,7904	0,7934	0,796	0,7984
700	0,7771	0,7792	0,7822	0,7849	0,7879	0,7915	0,794	0,7962	0,7983
1000	0,7805	0,7822	0,7847	0,7869	0,7894	0,7925	0,7946	0,7964	0,7982
n	$F=1-\alpha/2$								
	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	
10	0,8398	0,8550	0,8720	0,8941	0,9111	0,9244	0,9387	0,9476	
15	0,8282	0,8414	0,8561	0,8754	0,8903	0,9026	0,9160	0,9247	
20	0,8223	0,8340	0,8471	0,8644	0,8779	0,8891	0,9015	0,9096	
30	0,8161	0,8258	0,8368	0,8516	0,8632	0,8729	0,8839	0,8910	
40	0,8126	0,8212	0,8309	0,844	0,8545	0,8632	0,8729	0,8794	
50	0,8105	0,8183	0,8271	0,8389	0,8484	0,8564	0,8653	0,8713	
60	0,8090	0,8161	0,8242	0,8352	0,8440	0,8513	0,8598	0,8654	
70	0,8079	0,8145	0,8221	0,8323	0,8404	0,8474	0,8553	0,8605	
80	0,8070	0,8132	0,8203	0,8300	0,8377	0,8443	0,8518	0,8568	
90	0,8064	0,8122	0,819	0,8281	0,8354	0,8416	0,8487	0,8534	
100	0,8058	0,8114	0,8178	0,8265	0,8335	0,8394	0,8461	0,8507	
150	0,8040	0,8086	0,8138	0,821	0,8269	0,8318	0,8375	0,8413	
200	0,8029	0,8069	0,8115	0,8178	0,8229	0,8273	0,8323	0,8357	
300	0,8019	0,8051	0,8089	0,8141	0,8183	0,8219	0,8261	0,8288	
500	0,8008	0,8034	0,8063	0,8104	0,8137	0,8165	0,8198	0,8220	
700	0,8003	0,8024	0,8049	0,8084	0,8112	0,8136	0,8164	0,8183	
1000	0,7998	0,8017	0,8037	0,8066	0,8090	0,8111	0,8134	0,8150	

При каждом n зависимость $d = f(u[F])$ с высокой достоверностью аппроксимации R^2 можно описать полиномом третьей степени, как это показано для некоторых n на рис. 1, т. е.

$$d = a(n) \cdot (u[F])^3 + b(n) \cdot (u[F])^2 + c(n) \cdot (u[F]) + z(n) \quad (7)$$

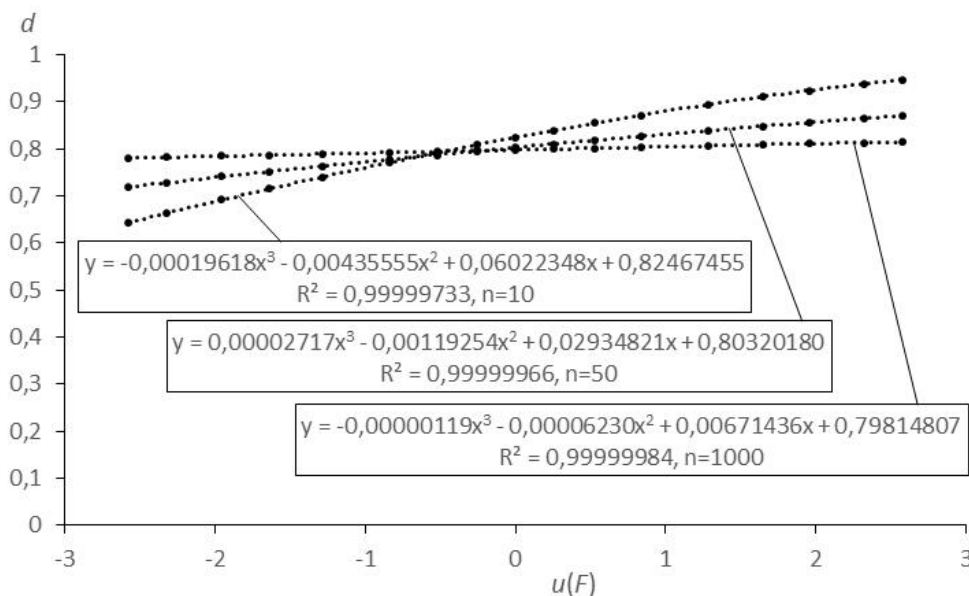


Рис. 1. Аппроксимация $d = f(u[F])$ полиномом третьей степени

При этом значения коэффициентов $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$ и $z(n)$ в зависимости от n с высокой достоверностью аппроксимации могут быть описаны выражениями вида

$$k_1 n^{6r} + k_2 n^{5r} + k_3 n^{4r} + k_4 n^{3r} + k_5 n^{2r} + k_6 n^r + k_7,$$

получаемыми как полиномы шестой степени от n^r .

Высокая достоверность аппроксимации достигается:

для $a(n)$ при $r = -0,14$,

для $b(n)$ при $r = -0,42$,

для $c(n)$ при $r = -0,41$,

для $z(n)$ при $r = 0,05$.

В результате:

$$\begin{aligned} a(n) &= -4,01173n^{-0,84} + 12,71271n^{-0,7} - 16,74653n^{-0,56} + 11,725466n^{-0,42} - 4,59679n^{-0,28} + 0,955631n^{-0,14} - 0,082229; \\ b(n) &= -10,0553n^{-2,52} + 11,535n^{-2,1} - 4,92286n^{-1,68} + 1,02015n^{-1,26} - 0,149316n^{-0,84} + 0,0077n^{-0,42} - 0,000166; \\ c(n) &= 25,6685n^{-2,46} - 33,3996n^{-2,05} + 17,2824n^{-1,64} - 4,8713n^{-1,23} + 0,8653n^{-0,82} + 0,0737n^{-0,41} + 0,000183; \\ z(n) &= 234,650624n^{0,3} - 1834,91616n^{0,25} + 5979,1209n^{0,2} - 10393,10368n^{0,15} + 10165,33465n^{0,1} - 5305,2972n^{0,05} \\ &\quad + 1155,25314. \end{aligned}$$

Подставляя выражения для $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$ и $z(n)$ в (7), получаем выражение аппроксимации для $d(n, F)$.

Оценка точности аппроксимаций. Находили абсолютные отклонения $d(n, F)$, рассчитанных по (4), (5), (6) и (7), от $d(n, F)$, полученных методом Монте-Карло при n и F , приведенных в таблице 1. По этим отклонениям определяли средние арифметические отклонения $\Delta_{\text{ср}}$, максимальные отклонения $\Delta_{\text{макс}}$, соответствующие им табличные n_{Δ} , F_{Δ} и p_{Δ} , а также, по данным моделирования методом Монте-Карло, фактические $p_{\text{апп}}$.

Таблица 2

Оценка точности различных аппроксимаций

Аппроксимация	$\Delta_{\text{макс}}$	$\Delta_{\text{ср}}$	n_{Δ}	F_{Δ}	p_{Δ}	$p_{\text{апп}}$
По (4)	0,02473	0,00240	10	0,005	0,01	0,0245
По (5)	0,02817	0,00239	10	0,995	0,01	0,00038
По (6)	0,02963	0,00243	10	0,995	0,01	0,000228
По (7)	0,00030	0,000039	10	0,005	0,01	0,0101

Из таблицы 2 видно, что аппроксимации (4), (5) и (6) неудовлетворительны ввиду значительных различий между p_{Δ} и $p_{\text{апп}}$. В то же время предложенная в данной работе аппроксимация (7) обеспечивает высокую точность и вполне приемлема.

Аппроксимация функции распределения $F(n, d)$ и расчет достигаемого уровня значимости. Получить приемлемую аппроксимацию для $F(n, d)$ тем же методом, как для $d(n, F)$, не удастся. Значения $F(n, d)$ могут быть получены из (7) итерацией или решением кубического уравнения вида

$$a(n)(u[F])^3 + b(n)(u[F])^2 + c(n)(u[F]) + [z(n) - d] = 0. \quad (8)$$

Корнями кубического уравнения могут быть как действительные, так и комплексные числа [8]. В данном случае приемлемыми корнями могут быть только действительные значения $u(F)$, функция стандартного нормального распределения от которых находится в пределах 0,005...0,995.

В [8] определены достигаемые уровни значимости p при проверке гипотезы нормальности различными критериями, полученные по данным некоторых классических экспериментов: Кавендиша по определению плотности Земли, Милликена по измерению заряда электрона, Майкельсона по измерению скорости света, Ньюкомба по уточнению результатов Майкельсона. В частности, были определены методом Монте-Карло значения p по критерию Гири. В таблице 3 приведены значения p для критерия Гири по [8], а также рассчитанные по (8).

Таблица 3

Проверка нормальности по данным классических экспериментов

Эксперимент	n	d по [8]	d по (1)	p по [8]	p по (8)
Кавендиша	29	0,8008	0,8008	0,874	0,873
Милликена	58	0,7977	0,7977	0,864	0,863
Майкельсона	100	0,7790	0,7790	0,320	0,320
Ньюкомба	64	0,7745	0,7745	0,309	0,309

Из таблицы 2 видно, что расчет достигаемых уровней значимости, предложенный в данной работе, дает для классических экспериментов практически те же результаты, что и метод Монте-Карло.

Закключение. Предложенная в статье аппроксимация позволяет с высокой точностью рассчитывать процентные точки статистики критерия Гири и достигаемые уровни значимости и может быть рекомендована для практического применения, в том числе при автоматизированной обработке данных. В то же время предложенные ранее аппроксимации неудовлетворительны.

Список литературы

1. Александровская Л. Н., Кириллин А. В. Рекомендации по применению ряда критериев проверки отклонения распределения вероятностей от нормального закона в практике инженерного статистического анализа // Известия самарского научного центра российской академии наук. 2017. Т. 19. № 1. С. 82–90.

2. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. М. : Наука, 1983. 416 с.
3. Долганов Д. В., Долганова Т. И., Самылов В. В. Оценка нарушений постуральной функции позвоночника в ортостатических стереотипах // *Гений Ортопедии*. 2018. Т. 24. № 3. С. 357–364.
4. Ермаков С. М. Метод Монте-Карло в вычислительной математике (вводный курс). СПб. : Невский диалект, 2009. 192 с.
5. Зыков С. В., Незнанов А. А., Максименкова О. В. Критерии отклонения распределения случайных величин от нормального в математическом обеспечении программных систем поддержки измерений в образовании // *Программные системы: теория и приложения*. 2018. Т. 9. № 4 (39). С. 199–218.
6. Кобзарь А. И. Прикладная математическая статистика. М. : Физматлит, 2012. 816 с.
7. Ласкин М. Б., Пупенцова С. В. Логарифмически нормальное распределение цен на объекты недвижимости // *Имущественные отношения в Российской Федерации*. 2014. № 5 (152). С. 52–59.
8. Лемешко Б. Ю. Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона : руководство по применению. М. : ИНФРА-М, 2015. 160 с.
9. Методика валидации данных долгосрочных наблюдений скорости ветра для целей ветроэнергетики / Иванченко И. В., Пепелов А. В., Петренко Е. В., Тучинский Б. Г. // *Международный научный журнал Альтернативная энергетика и экология*. 2013. № 3 (121). С. 72–78.
10. Смирнов В. И. Курс высшей математики. СПб. : БХВ-Петербург, 2008. Т. 1. 624 с.
11. Шаталов К. В., Черепанова А. Д. Проверка гипотезы о соответствии погрешностей результатов анализа нефтепродуктов нормальному закону распределения случайной величины // *Измерительная техника*. 2019. № 10. С. 52–60.
12. Geary R. C. Moments of the ratio of the mean deviation to the standard deviation for normal samples // *Biometrika*. 1936. № 28. Pp. 295–307.
13. Geary R. C. Testing for normality // *Biometrika*. 1947. Vol. 34. № 3/4. Pp. 209–242.
14. Geary R. C. The ratio of the mean deviation to the standard deviation as a test of normality // *Biometrika*. 1935. V. 27. Pp. 310–322.

Approximation of the percentage points of the Geary criterion

Zalyazhnykh Vladimir Vasilyevich

PhD in Technical Sciences, associate professor of the Department of Standardization, Metrology and Certification,
M. V. Lomonosov Northern (Arctic) Federal University.
Russia, Arkhangelsk. ORCID: 0000-0001-6102-7221. E-mail: zalvladimir@yandex.ru

Abstract. The Geary criterion is one of the most powerful criteria for testing the hypothesis of the normality of the distribution. Its disadvantage consists in a significant dependence of the percentage points of the criterion statistics on the sample size and the value of the criterion distribution function, which complicates the assessment of the normality hypothesis both by the permissible and by the achieved significance level.

In this article, the Monte Carlo method has obtained a table of percentage points of the Geary criterion statistics in wide ranges of sample sizes and values of the criterion distribution function. According to her data, an approximation of percentage points is proposed, which makes it possible to find their values with high accuracy. This makes it possible to apply the Kettlebell criterion without difficulty. It is also shown that the previously proposed approximations of percentage points are unsatisfactory in accuracy.

Keywords: Geary criterion, approximation, percentage points, significance level.

References

1. Aleksandrovskaya L. N., Kirillin A. V. *Rekomendacii po primeneniyu ryada kriteriev proverki otkloneniya raspredeleniya veroyatnostej ot normal'nogo zakona v praktike inzhener'nogo statisticheskogo analiza* [Recommendations on the application of a number of criteria for checking the deviation of the probability distribution from the normal law in the practice of engineering statistical analysis] // *Izvestiya samarskogo nauchnogo centra rossijskoj akademii nauk* – Proceedings of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. 2017. Vol. 19. No. 1. Pp. 82–90.
2. Bol'shev L. N., Smirnov N. V. *Tablicy matematicheskoy statistiki* [Tables of mathematical statistics]. M. Nauka (Science). 1983. 416 p.
3. Dolganov D. V., Dolganova T. I., Samylov V. V. *Ocenka narushenij postural'noj funkicii pozvonochnika v ortostaticheskikh stereotipah* [Assessment of disorders of the postural function of the spine in orthostatic stereotypes] // *Genij Ortopedii* – Genius of Orthopedics. 2018. Vol. 24. No. 3. Pp. 357–364.
4. Ermakov S. M. *Metod Monte-Karlo v vychislitel'noj matematike (vvodnyj kurs)* [Monte Carlo method in computational mathematics (introductory course)]. SPb. Nevsky Dialect. 2009. 192 p.
5. Zykov S. V., Neznanov A. A., Maksimenkova O. V. *Kriterii otkloneniya raspredeleniya sluchajnyh velichin ot normal'nogo v matematicheskom obespechenii programmnyh sistem podderzhki izmerenij v obrazovanii* [Criteria for deviation of the distribution of random variables from normal in the mathematical support of software systems for measurement support in education] // *Programmnye sistemy: teoriya i prilozheniya* – Software systems: theory and applications. 2018. Vol. 9. No. 4 (39). Pp. 199–218.

6. Kobzar' A. I. *Prikladnaya matematicheskaya statistika* [Applied mathematical statistics]. M. Fizmatlit. 2012. 816 p.
7. Laskin M. B., Pupencova S. V. *Logarifmicheski normal'noe raspredelenie cen na ob'ekty nedvizhimosti* [Logarithmically normal distribution of prices for real estate objects] // *Imushchestvennye otnosheniya v Rossijskoj Federacii* – Property relations in the Russian Federation. 2014. No. 5 (152). Pp. 52–59.
8. Lemesko B. Yu. *Kriterii proverki otkloneniya raspredeleniya ot normal'nogo zakona : rukovodstvo po primeniyu* [Criteria for checking the deviation of the distribution from the normal law : application guide]. M. INFRA-M. 2015. 160 p.
9. *Metodika validacii dannyh dolgosrochnyh nablyudenij skorosti vetra dlya celej vetroenergetiki* – Methodology for validating data from long-term observations of wind speed for wind energy purposes / Ivanchenko I. V., Pepelov A. V., Petrenko E. V., Tuchinsky B. G. // *International Scientific Journal Alternative Energy and Ecology*. 2013. No. 3 (121). Pp. 72–78.
10. Smirnov V. I. *Kurs vysshej matematiki* [Course of higher mathematics]. SPb. BHV-Petersburg. 2008. Vol. 1. 624 p.
11. Shatalov K. V., Cherepanova A. D. *Proverka gipotezy o sootvetstvii pogreshnostej rezul'tatov analiza nefteproduktov normal'nomu zakonu raspredeleniya sluchajnoj velichiny* [Verification of the hypothesis about the correspondence of the errors of the results of the analysis of petroleum products to the normal distribution law of a random variable] // *Izmeritel'naya tekhnika* – Measuring technique. 2019. No. 10. Pp. 52–60.
12. Geary R. C. Moments of the ratio of the mean deviation to the standard deviation for normal samples // *Biometrika*. 1936. No. 28. Pp. 295–307.
13. Geary R. C. Testing for normality // *Biometrika*. 1947. Vol. 34. No. 3/4. Pp. 209–242.
14. Geary R. C. The ratio of the mean deviation to the standard deviation as a test of normality // *Biometrika*. 1935. V. 27. Pp. 310–322.

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

УДК 37.016:512

DOI 10.25730/VSU.0536.22.032

Учебные пособия по алгебре для студентов младших курсов – разработка и опыт использования

Еловикова Юлия Александровна

кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Брянский государственный университет им. академика И. Г. Петровского.
Россия, г. Брянск. ORCID: 0000-0003-3066-7984. E-mail: elov77@yandex.ru

Аннотация. Излагаются идеи разработки учебных пособий по базовым курсам алгебры: «Основы общей алгебры», «Теория многочленов», «Линейная алгебра». При этом одна из основных задач – сделать материал максимально доступным для восприятия студентами 1-го и 2-го курсов. Особое внимание уделяется методической переработке лекционного материала, его структурированию, детализации. Предлагается методика работы с подготовленными учебными пособиями, анализируется опыт их практического использования на кафедре математического анализа, алгебры и геометрии Брянского государственного университета. Авторы серии учебных пособий надеются, что их разработка поможет студентам младших курсов адаптироваться к новым условиям обучения, а преподавателям – успешно решить ряд методических проблем при преподавании высшей алгебры.

Ключевые слова: учебные пособия, алгебра общая, линейная, теория многочленов.

Требования к преподаванию математических дисциплин в вузе в последнее время существенно меняются. Это происходит как в связи с развитием науки, технологий, средств коммуникации в обществе, так и в связи с чрезвычайными обстоятельствами, в частности, пандемией и самоизоляцией. В целях формирования у студентов компетенций, предусмотренных ФГОС ВО, изменяются принципы организации учебного процесса, увеличивается объем самостоятельной работы студентов.

В связи с этим при преподавании базовых математических дисциплин в вузе можно отметить следующие общеизвестные трудности:

- низкий уровень готовности студентов младших курсов к восприятию теоретического материала;
- уменьшение количества аудиторных часов, отведенных в новых учебных планах на практические и особенно на лекционные занятия;
- необходимость дистанционного и самостоятельного изучения отдельных частей курса в зависимости от обстоятельств.

Перечисленные сложности наблюдаются в том числе в ходе преподавания алгебраических дисциплин «Основы общей алгебры», «Теория многочленов», «Линейная алгебра» на первом и втором курсах студентам педагогического направления на кафедре математического анализа, алгебры и геометрии Брянского государственного университета. Эффективная работа по решению этих проблем необходима, поскольку указанные дисциплины содержат основы важнейших разделов современной алгебры. Их изучение способствует формированию общей математической культуры выпускника, необходимой будущему учителю для понимания как основного курса математики, так и школьных элективных курсов. Глубокая теоретическая подготовка, умение работать с понятийным аппаратом, с математическим доказательством, сформированное в ходе изучения теоретического курса алгебры, позволяют выпускникам бакалавриата успешно продолжить обучение в магистратуре, в том числе по классическим математическим направлениям.

В течение трех лет авторским коллективом в составе Еловиковой Ю. А., Сорокиной М. М., Корпачевой М. А. разрабатывались методические материалы по курсу алгебры для студентов направления 44.03.01 «Педагогическое образование», профиль (направленность) «Математика». В основу был положен опыт проведения лекционных и практических занятий со студентами физико-ма-

тематического факультета БГУ на протяжении более двух десятилетий, с учетом традиций изложения разделов алгебры, сложившихся на кафедре алгебры БГУ под руководством профессора Виктора Александровича Ведерникова. Итогом работы явилась публикация трех учебных пособий по трем разделам алгебры: «Основы общей алгебры» [4], «Теория многочленов» [5] и «Линейная алгебра» [6].

При подготовке учебных пособий [4–6] авторами была поставлена цель не только изложить основные разделы курса алгебры достаточно полно, логично и обоснованно, но и сделать материал максимально доступным для восприятия студентами младших курсов. Наряду с классическими учебниками по высшей алгебре, такими как [7–9], авторы ориентировались в том числе на серию учебников по алгебре, подготовленных Московским государственным заочным педагогическим институтом для студентов-заочников [1–3]. Подробное изложение доказательства теорем, большое количество примеров и задач, иллюстрирующих теоретические понятия, сделало в свое время эти учебники популярными, «понятными» и удобными для самостоятельного изучения материала.

Теоретическая часть каждого учебного пособия [4–6] содержит лекционный материал, методически переработанный и подготовленный для применения эффективных приемов смыслового чтения. В частности, сделан акцент на существенные признаки понятий, четко выявлена структура определений, структура формулировок теорем, с помощью нумерации и ссылок установлены связи по выделенной структуре с предыдущими и последующими определениями и утверждениями (рисунк 1). В доказательстве теорем явно выделена идея и приемы доказательства, его этапы и шаги (рисунк 2).

Опыт последующей работы с учебными пособиями на лекциях показал, что уровень детализации изложения теории позволяет студентам использовать этот текст в качестве готового конспекта, не записывая на лекции большие фрагменты материала вслед за лектором. В эпоху цифровизации вместо работы с мелом и доской все чаще используются технические средства, а вместо копирования с помощью бумаги и ручки – электронные носители информации. Методика чтения лекций по готовым конспектам, на наш взгляд, является шагом в этом направлении.

Студенты на лекции в процессе диалога с преподавателем выделяют основную мысль текста, устанавливают логические связи в рассуждениях и связи с ранее рассмотренным материалом. При этом делаются краткие пометки в готовых распечатанных конспектах, материал иллюстрируется примерами на полях, на обороте листа. Таким образом, студенты освобождены от работы по механическому переписыванию текста с доски. Такое переписывание часто делается без осмысления, в связи с нехваткой времени при высоком темпе рассмотрения материала.

В то же время в ходе работы выявлен ряд недостатков этой методики. Поскольку текст не записан на доске, сложно привлечь внимание к отдельному его фрагменту, формуле, указать на определенные элементы. Здесь может помочь демонстрация текста лекций на экране с помощью презентации, с постепенным появлением обсуждаемых фрагментов.

Также к недостаткам можно отнести то, что при наличии готового конспекта на лекции не используется эффективный методический прием осмысленного конспектирования с выделением основной мысли, структурированием материала. Отчасти это компенсируется тем, что студент после лекции готовится к отчету по изученной теории, так называемому математическому диктанту, в начале каждого практического занятия. В ходе диктанта студент в письменной форме излагает формулировки определений и теорем, алгоритмы решения задач.

Проведение лекций с использованием текста учебных пособий позволило ускорить темп рассмотрения учебного материала в аудитории, за счет чего увеличить объем материала, который студенты рассматривают в диалоге с преподавателем. После этого студенты успешнее работают над теоретическими разделами, заданными для самостоятельного изучения. Промежуточный контроль (экзамен, собеседование) показывает достаточно глубокое понимание учащимися сути математических определений, логики рассуждений, осознание важности строгого обоснования каждого вывода при доказательстве. По отзывам студентов, изучение теории стало комфортнее и «понятнее».

Вторая часть каждого учебного пособия, практическая, – содержит варианты типовых практических заданий и подробные образцы их решения, что позволяет использовать учебное пособие на практических занятиях, а также при самостоятельной подготовке студентов к учебным занятиям, контрольным работам, итоговому тестированию, экзамену. При оформлении образцов решения задач учтены требования к формированию умений. В частности, четко выделены этапы выполнения действия или его алгоритм, этапы сформулированы в общем виде, обоснование каждого этапа приведено в теоретической части пособия, а образец решения задачи содержит ссылки на соответствующие определения и теоремы (рисунк 3).

■ **Теорема 17.2** (свойство симметричного элемента). Пусть $\circ$ – бинарная алгебраическая операция на множестве $M \neq \emptyset$, e – нейтральный элемент в M относительно операции $\circ$. Если операция $\circ$ ассоциативна на M , и в M для элемента $a \in M$ существует симметричный элемент, то он единственный.

► **Доказательство.** Пусть a' и a'' – симметричные элементы для элемента $a \in M$, $a', a'' \in M$. Покажем, что $a' = a''$.

Так как a' симметричный элемент для элемента a относительно операции $\circ$, то, по определению 17.4, $a \circ a' = a' \circ a = e$ (1).

Так как a'' симметричный элемент для элемента a относительно операции $\circ$, то, по определению 17.4, $a \circ a'' = a'' \circ a = e$ (2).

Тогда $a' =$ (по опр.17.3) $= a' \circ e =$ (из (2)) $= a' \circ (a \circ a'') =$ (ассоциативность $\circ$) $= (a' \circ a) \circ a'' =$ (из (1)) $= e \circ a'' =$ (по опр.17.3) $= a''$. Теорема доказана.

Рис. 1. Фрагмент детализированного доказательства [4, с. 35]

■ **Теорема 7.1 (о делении с остатком для многочленов).** Пусть F – поле, $f(x), g(x) \in F[x]$, $g(x) \neq 0$. Тогда существуют единственные многочлены $q(x), r(x) \in F[x]$ такие, что

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x), \text{ причем } \deg r(x) < \deg g(x). \quad (1)$$

При этом $q(x)$ называется *неполным частным*, а $r(x)$ – *остатком* при делении $f(x)$ на $g(x)$.

► **Доказательство.**

1. Существование.

Если $f(x) = 0$, то (1) верно и имеет вид $0(x) = g(x) \cdot 0(x) + 0(x)$, то есть $q(x) = 0$ и $r(x) = 0$, причем $\deg r(x) = -\infty < \deg g(x)$, ввиду $g(x) \neq 0$.

Пусть $f(x) \neq 0$.

Если $\deg f(x) < \deg g(x)$, справедливо $f(x) = g(x) \cdot 0(x) + f(x)$, то есть в (1) необходимо взять $q(x) = 0$, $r(x) = f(x)$, причем $\deg r(x) = \deg f(x) < \deg g(x)$.

Пусть $\deg f(x) \geq \deg g(x)$. Тогда $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, $a_n \neq 0$, $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$, $b_m \neq 0$, $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $n \geq m$. Доказательство проведем методом математической индукции по параметру n .

1) Пусть $n = \deg f(x) = 0$. Тогда $f(x) = a_0$. Так как $m \leq n = 0$ и $m = \deg g(x) \neq -\infty$, то $m = 0$ и $g(x) = b_0$. Так как F – поле и $b_0 \neq 0$, то существует $b_0^{-1} \in F$. Тогда $\underbrace{a_0}_{f(x)} = \underbrace{b_0}_{g(x)} \cdot \underbrace{b_0^{-1} \cdot a_0}_{q(x)} + \underbrace{0}_{r(x)}$, причем $\deg r(x) = -\infty < 0 = \deg g(x)$.

2) Пусть $\deg f(x) = n > 0$. Предположим, что утверждение верно для любого многочлена степени, меньшей n , а именно: любой многочлен степени, меньшей n , имеет представление вида (1), то есть делится на $g(x)$ с остатком.

Рис. 2. Фрагмент детализированного доказательства [5, с. 16]

■ Задание 12.

Можно ли в векторном пространстве $V_3 = \mathbb{R}^3$ задать скалярное умножение $\bar{x} \cdot \bar{y}$ векторов $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$ с помощью указанной формулы? Если да, то является ли скалярное умножение положительно определенным?

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 7x_3 y_3 \quad (1)$$

► Решение:

Согласно определению 28.1, для того чтобы формула (1) задавала скалярное умножение, должны выполняться условия:

- 1) $\forall \bar{a}, \bar{b} \in V_3, \bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ – симметричность;
- 2) $\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V_3, (\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}$ – дистрибутивность;
- 3) $\forall \bar{a}, \bar{b} \in V_3, \forall \alpha \in P, (\alpha \bar{a}) \cdot \bar{b} = \alpha(\bar{a} \cdot \bar{b})$ – ассоциативность.

Проверим выполнимость условий 1) – 3).

1) Пусть $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3), \bar{y} = (y_1, y_2, y_3) \in V_3$. Так как $V_3 = \mathbb{R}^3$ – арифметическое 3-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, то $x_i, y_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, 3}$. Следовательно, имеем $\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 7x_3 y_3 = y_1 x_1 + 2y_2 x_2 + 7y_3 x_3 = \bar{y} \cdot \bar{x}$. Таким образом, условие 1) выполняется.

$$\begin{aligned} 2) \text{ Пусть } \bar{x} &= (x_1, x_2, x_3), \bar{y} = (y_1, y_2, y_3), \bar{z} = (z_1, z_2, z_3) \in V_3. \text{ Тогда} \\ (\bar{x} + \bar{y}) \cdot \bar{z} &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \cdot (z_1, z_2, z_3) = \\ &= (x_1 + y_1)z_1 + 2(x_2 + y_2)z_2 + 7(x_3 + y_3)z_3 = \\ &= (x_1 z_1 + 2x_2 z_2 + 7x_3 z_3) + (y_1 z_1 + 2y_2 z_2 + 7y_3 z_3) = \bar{x} \cdot \bar{z} + \bar{y} \cdot \bar{z}. \end{aligned}$$

Следовательно, условие 2) справедливо.

Рис. 3. Фрагмент образца решения практического задания [6, с. 122]

Варианты практических заданий для самостоятельного решения представляют собой систему упражнений для отработки алгоритмов решения типовых задач.

Практическая часть учебных пособий [4–6] в настоящее время успешно используется преподавателями кафедры при проведении летней практики по алгебре, при работе со студентами заочной формы обучения, со студентами, которые пропустили аудиторные занятия и учатся решать задачи самостоятельно. Все это позволяет совершенствовать уже имеющиеся материалы и методику работы с ними.

Первые шаги изучения высшей математики в вузе вызывают трудности у студента, недавно закончившего обучение в школе. Непривычными для него являются лекционно-семинарская схема организации учебного процесса, большой объем самостоятельной работы, усиленное внимание к теории и математическому доказательству, лаконичный стиль изложения материала в классических учебниках для высшей школы. Преподаватель часто встречается, как на занятиях, так и на интернет-форумах, с просьбой порекомендовать «понятный» учебник по тому или иному разделу высшей математики. Авторы надеются, что серия подготовленных ими учебных пособий наряду со многими другими методическими разработками коллег поможет студентам младших курсов адаптироваться к новым условиям обучения, а преподавателям – успешно решить ряд методических проблем при преподавании высшей алгебры.

Список литературы

1. Варпаховский Ф. Л., Солодовников А. С., Стеллецкий И. В. Алгебра. Группы, кольца, поля. Векторные и евклидовы пространства. Линейные отображения. М.: Просвещение, 1978.
2. Варпаховский Ф. Л., Солодовников А. С. Алгебра. Элементы теории множеств. Линейные уравнения и неравенства. Арифметические векторы. Матрицы и определители. М.: Просвещение, 1981.

3. Винберг Э. Б. Алгебра многочленов. М. : Просвещение, 1980.
4. Еловикова Ю. А., Сорокина М. М. Основы общей алгебры : учеб. пособие для студентов направления подготовки бакалавров 44.03.01 Педагогическое образование, профиль Математика. Брянск : Полиграм плюс, 2018.
5. Еловикова Ю. А., Сорокина М. М. Теория многочленов : учеб. пособие для студентов направления подготовки бакалавров 44.03.01 Педагогическое образование, профиль Математика. Брянск : Полиграм плюс, 2020.
6. Еловикова Ю. А., Корпачева М. А., Сорокина М. М. Линейная алгебра : учеб. пособие для студентов направления подготовки бакалавров 44.03.01 Педагогическое образование, профиль Математика. Брянск : Полиграм плюс, 2019.
7. Кострикин А. И. Введение в алгебру : в 3-х ч. Ч. 1: Основы алгебры : учебник. М. : МЦНМО, 2018.
8. Кострикин А. И. Введение в алгебру : в 3-х ч. Ч. 2: Линейная алгебра : учебник. М. : МЦНМО, 2018.
9. Кострикин А. И. Введение в алгебру : в 3-х ч. Ч. 3: Основные структуры алгебры : учебник. М. : МЦНМО, 2018.

Algebra textbooks for undergraduates – development and use experience

Yelovikova Yulia Aleksandrovna

PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor, associate professor of the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, Bryansk State Academician I. G. Petrovsky University.
Russia, Bryansk. ORCID: 0000-0003-3066-7984. E-mail: elov77@yandex.ru

Abstract. The ideas of developing textbooks on basic algebra courses are presented: "Fundamentals of General Algebra", "Theory of polynomials", "Linear Algebra". At the same time, one of the main tasks is to make the material as accessible as possible for students of the 1st and 2nd courses. Special attention is paid to the methodical processing of lecture material, its structuring, detailing. The methodology of working with the prepared textbooks is proposed, the experience of their practical use at the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry of Bryansk State University is analyzed. The authors of a series of textbooks hope that their development will help junior students adapt to new learning conditions, and teachers will successfully solve a number of methodological problems when teaching higher algebra.

Keywords: textbooks, general algebra, linear, theory of polynomials.

References

1. Varpahovskij F. L., Solodovnikov A. S., Stel'ceckij I. V. *Algebra. Gruppy, kol'ca, polya. Vektornye i evklidovy prostranstva. Linejnye otobrazheniya* [Algebra. Groups, rings, fields. Vector and Euclidean spaces. Linear mappings]. M. Prosveshchenie (Enlightenment). 1978.
2. Varpahovskij F. L., Solodovnikov A. S. *Algebra. Elementy teorii mnozhestv. Linejnye uravneniya i neravenstva. Arifmeticheskie vektory. Matricy i opredeliteli* [Algebra. Elements of set theory. Linear equations and inequalities. Arithmetic vectors. Matrices and determinants]. M. Prosveshchenie (Enlightenment). 1981.
3. Vinberg E. B. *Algebra mnogochlenov* [Algebra of polynomials]. M. Prosveshchenie (Enlightenment). 1980.
4. Elovikova Yu. A., Sorokina M. M. *Osnovy obshchej algebrы : ucheb. posobie dlya studentov napravleniya podgotovki bakalavrov 44.03.01 Pedagogicheskoe obrazovanie, profil' Matematika* [Fundamentals of general algebra : textbook for students of bachelor's degree 44.03.01 Pedagogical education, Mathematics profile]. Bryansk. Polygram Plus. 2018.
5. Elovikova Yu. A., Sorokina M. M. *Teoriya mnogochlenov : ucheb. posobie dlya studentov napravleniya podgotovki bakalavrov 44.03.01 Pedagogicheskoe obrazovanie, profil' Matematika* [Theory of polynomials : textbook for students of bachelor's degree 44.03.01 Pedagogical education, Mathematics profile]. Bryansk. Polygram Plus. 2020.
6. Elovikova Yu. A., Korpacheva M. A., Sorokina M. M. *Linejnaya algebra : ucheb. posobie dlya studentov napravleniya podgotovki bakalavrov 44.03.01 Pedagogicheskoe obrazovanie, profil' Matematika* [Linear Algebra : textbook for students of bachelor's degree 44.03.01 Pedagogical education, Mathematics profile]. Bryansk. Polygram Plus. 2019.
7. Kostrikin A. I. *Vvedenie v algebru : v 3-h ch. Ch. 1: Osnovy algebrы : uchebnik* [Introduction to Algebra : in 3 parts. Part 1: Fundamentals of Algebra : textbook]. M. ICNMO. 2018.
8. Kostrikin A. I. *Vvedenie v algebru : v 3-h ch. Ch. 2: Linejnaya algebra : uchebnik* [Introduction to Algebra : in 3 parts. Part 2: Linear Algebra : textbook]. M. ICNMO. 2018.
9. Kostrikin A. I. *Vvedenie v algebru : v 3-h ch. Ch. 3: Osnovnye struktury algebrы : uchebnik* [Introduction to algebra : in 3 parts. Part 3: Basic structures of algebra : textbook]. M. ICNMO. 2018.

О методических аспектах определения показателей качества знаний, формируемых студентами по математическим дисциплинам в технических вузах

Герасименко Петр Васильевич

доктор технических наук, профессор, Петербургский государственный университет путей сообщения
Императора Александра I. Россия, г. Санкт-Петербург.

ORCID: 0000-0002-7546-661X. Scopus Author ID: 7005769656. E-mail: pv39@mail.ru

Аннотация. Обоснованы количественные показатели математических знаний студентов, формируемых в вузе. Первый показатель характеризует уровень знаний содержания дисциплины. Его количественная величина определяется индивидуальными экзаменационными оценками студентов и средней оценкой коллектива студентов. Второй показатель характеризует плотность межпредметной связи между математическими дисциплинами. Он измеряется величиной коэффициента корреляции между парой дисциплин внутри блока математических дисциплин и средним коэффициентом корреляции всех дисциплин блока. Приведен пример определения тесноты знаний между математическими дисциплинами, изученными бакалаврами направления подготовки «информатика и вычислительная техника» ПсковГУ.

Ключевые слова: математические дисциплины, ЕГЭ, регрессия, элементарная и высшая математика, корреляция.

Все последние годы проблема совершенствования подготовки кадров в вузах РФ занимает центральное место и ждет сегодня своего решения [3; 7; 8]. Острота ее подтверждена пресс-службой Минобрнауки РФ в своем сообщении (РИА Новости от 25 мая 2022 года) о необходимости реформы в связи с принятым в стране решением постепенно уходить от болонской системы. Усиление ухода из системы реформы в последнее время обусловлено тем, что стране надлежит сфокусироваться на создании и разработке личной системы образования. Необходимость ухода из болонской системы вызвала немало прогнозов и сценариев будущего образовательного процесса, в котором значительное место отводится повышению его качества.

Следовательно, остро поставлен вопрос создания методик оценки реального состояния образовательного процесса, который, как известно, включает оценку уровня воспитательной работы, формирование необходимых знаний в соответствии с учебными планами и программами, квалификации научно-педагогических кадров, результатов научно-исследовательской работы, качества учебно-методического и материально-технического обеспечения учебного процесса. Как известно, эффективное реформирование образования возможно лишь на основе применения корректных оценочных процедур его состояния, в свою очередь корректность оценки определяется качеством измерительных исходных материалов.

Рассматривая качество знаний выпускников вуза, следует отметить огромное влияние на формирование в вузе знаний базовых дисциплин, которые в свою очередь формируют огромный комплекс знаний дисциплин, определяющих профильные направления подготовки [4; 5]. В технических вузах важная роль принадлежит математическим дисциплинам, занимающим ведущее место в числе базовых.

В последние годы из-за произошедших в стране сложных социальных процессов существенно усложнился учебный процесс и снизился уровень знаний по элементарной математике у выпускников школы. Соответственно и качество подготовки студентов по математическим дисциплинам в вузах претерпело существенные изменения не в лучшую сторону [9; 10]. Неслучайно столь пристальное внимание продолжает уделяться сегодня качеству знаний, получаемых студентами по результатам учебного процесса в школе и вузе.

Кроме того, в связи с переходом на многоступенчатую форму обучения и новые государственные образовательные стандарты возникла настоятельная необходимость установления связи между знаниями изученных и подлежащих изучению дисциплин.

Целью настоящей работы является обоснование методических аспектов и подхода определения показателей качества знаний, формируемых в вузе математическими дисциплинами.

Для достижения поставленной цели реальный процесс обучения в вузе представляется случайным процессом, поскольку он подвержен значимому числу различных факторов, которые не

учитываются при определении таких интегральных показателей, как качество знаний. Подвергнуть случайный процесс детальному описанию для определения его качества не представляется возможным ввиду большой сложности учебного процесса. Поэтому качество рассматривают на временных сечениях этого процесса, посредством оценивания результатов сдачи студентами семестровых экзаменов.

Поскольку знания рассматривают как результат процесса познавательной деятельности, то есть сформированный субъективный образ реальности в форме понятий и представлений, то тогда на входе познавательного процесса следует поместить уровень знаний, предшествующих изучению дисциплины, а на выходе уровень достигнутого результата процесса.

Как известно, количественным индивидуальным показателем достигнутого уровня знаний содержания дисциплины каждого студента традиционно выступает оценка в баллах.

По своей сути оценка в баллах является значением случайной величины. Случайной ее следует считать даже потому, что ее выставляют как результат проверки знаний небольшой выборки проверяемого материала, в виде нескольких вопросов из большого их числа. Для отдельных групп студентов уровень качества знаний дисциплины в вузе оценивается традиционно по средней оценке.

Очевидно, оценка в баллах не в полной мере позволяет определить качество знаний обучаемых студентов, так она не учитывает степень влияния на нее предшествующих сформированных знаний. К сожалению, по настоящее время проведение диагностики знаний текущих дисциплин не увязывается или слабо увязывается с результатами контроля знаний предыдущих изученных дисциплин, а поэтому не дополняется причина уровня качества проведения учебного процесса.

Вместе с тем важным условием качества обучения студентов в вузе является наличие у них первичных базовых знаний для получения последующих новых знаний, которые должны опираться на предыдущие знания. Нарушая это основное правило педагогики, не обеспечивается утверждение, что новый материал необходимо изучать тогда, когда имеется необходимая база для его усвоения.

Поэтому необходимо при определении качества сформированных знаний изученных дисциплин устанавливать связи между базовыми для направления подготовки дисциплин и опорных для их изучения дисциплин помощью показателей тесноты связи. С математической точки зрения такие показатели могут определяться с помощью корреляционного математического аппарата [6].

При исследовании качества знаний по второму показателю при изучении многосеместровых математических дисциплин необходимо использовать достигнутые результаты обучения по первому показателю. Для чего полученные студентами в вузе оценки по математическим дисциплинам предлагается сгруппировать в виде блока математических дисциплин, включающего статистические данные оценок студентов. В составе блока математические дисциплины вуза располагаются в порядке их изучения. За критерий качества принимается степень тесноты между изучаемой и предыдущими в блоке дисциплинами. В качестве показателя степени тесноты принято в работе использовать коэффициент корреляции. Обобщенным показателем степени тесноты между дисциплинами блока может выступать средний коэффициент корреляции [6].

Как известно, коэффициенты корреляции обладают свойством ограниченности по величине. Поскольку рост знаний предыдущей дисциплины не предполагает снижение знаний последующей дисциплины, то следует полагать интервал изменения коэффициента корреляции для корреляционной связи двух дисциплин от 0 до 1. Выполнив расчет коэффициентов корреляции между всеми возможными парами дисциплин, можно построить матрицу корреляции, которая будет характеризовать уровни связей между дисциплинами блока.

Тогда сумма всех коэффициентов, разделенная на их число, равна среднему коэффициенту корреляции блока исследуемых дисциплин. Число элементов матрицы зависит от решаемой задачи. В случае оценки качества знаний одного блока, включающего m дисциплин, по каждой из которых представлены оценки одних и тех же студентов в одном и том же порядке следования, число элементов матрицы будет равно $h_1 = m \times (m-1)/2$. При построении матрицы коэффициентов корреляции, характеризующих тесноту связи между дисциплинами двух блоков, из которых первый блок содержит дисциплин m_1 , а второй m_2 , при числе студентов n в обоих блоках число элементов матрицы $h_2 = m_1 \times m_2$.

Для всех приведенных величин в пакете программы Excel существуют расчетные алгоритмы [6]. Они позволяют по статическим данным оценок студентов, полученных по математическим дисциплинам, получить средние значения оценок по каждой дисциплине, средние значения произведения оценок пары дисциплин, между которыми вычисляется коэффициент корреляции, и саму величину коэффициента [1].

Таким образом, количественные показатели сформированных в вузе знаний студентов должны входить в базовые показатели образовательного процесса. При этом уровень знаний содержания дисциплин, определяемый посредством индивидуальных экзаменационных оценок студентов

и интегральных средних оценок коллективов студентов, выступает как первый базовый показатель. Второй показатель предлагается направить на измерение плотности межпредметной связи между изучаемыми дисциплинами. Его количественным показателем может служить величина коэффициента корреляции между отдельными дисциплинами математического блока и среднего коэффициента корреляции дисциплин всего блока.

Следует отметить, что значение уровня знания школьной математики для формирования знаний математических дисциплин будущего выпускника инженерного вуза чрезвычайно велико. Ее роль для образовательного процесса в техническом вузе можно условно сравнить с выбором площадки для строительства промышленного здания. В обоих процессах, а именно строительства и образования, можно выделить следующие этапы: выбор площадки для строительства, создание фундамента, строительство корпуса здания и заполнение его оборудованием; в образовательном процессе им можно соотнести набор студентов, подготовку по математическим и естественно-научным дисциплинам, изучение общеинженерных и специальных дисциплин. Если строители выберут площадку на глинисто-болотистой местности вместо твердopочвенной и скалистой, то в образовательном процессе это будет соответствовать, что студенты набраны с низким числом баллов по элементарной математике. В этом случае ожидать подготовку специалиста-творца, как в здании нормального производства, не имеет смысла.

Как отмечалось в последние десятилетия, система школьного образования претерпела существенные изменения, причем не в лучшую сторону и прежде всего при изучении элементарной математики. Кроме того, произошедшие в стране сложные социальные процессы существенно снизили как уровень организации учебного процесса в школе, так и желание школьников обучаться в вузах, требующих фундаментальную математическую подготовку.

Поэтому многие технические вузы проводят набор студентов с низким количеством баллов по элементарной математике и самостоятельно осуществляют по ней доподготовку с желающими. Отличительной особенностью доподготовки является ее кратковременный срок, взамен отведенного для изучения большого объема материала за длительное время в школе. Естественно, влияние доподготовки по элементарной математике не оказывается достаточным для успешного освоения математических дисциплин в вузе. Многие научные статьи, которые посвящены результатам математической подготовки, отмечают, что в технические вузы сегодня поступает большое количество студентов с числом баллов от 27 до 60. В частности, в статье [2] подтверждается, что именно с такими баллами число студентов, поступивших в 2015 и 2018 гг. на направление «Информатика и вычислительная техника (ИВТ)» в ПсковГУ, составило около 80 % [1].

Используя статистические данные бакалавров направления ИВТ ПсковГУ, которые приведены в работе [1], выполнены определения показателей знаний математических дисциплин. Для бакалавров 2015 г. поступления в ПсковГУ таблица содержит средние по всем бакалаврам направления ИВТ количества баллов ЕГЭ и средние значения экзаменационных оценок в вузе по всем математическим дисциплинам, в порядке их изучения [1].

Таблица 1

Средние значения математических оценок в вузе и баллов ЕГЭ

Блок дисциплин	Математические						
	0	1	1	1	3	2	2
Семестр							
ЕГЭ и математические дисциплины	ЕГЭ по математике	Математическая логика	Алгебра и геометрия	Математический анализ	Теория вероятностей	Дискретная математика	Вычислительная математика
Средние значения	48,5	4,7	3,7	3,3	3,6	3,6	3,6

Следует заметить, что для дисциплины «Вычислительная математика», поскольку она изучается последней, когда все дисциплины математического блока изучены, определены коэффициенты корреляции со всеми изучаемыми дисциплинами. Дисциплина «Математическая логика» изучалась первой, и поскольку на нее влияние не оказывают другие дисциплины, кроме ЕГЭ, то определение коэффициента не проводилось.

Используя данные [1], выполнен расчет матрицы коэффициентов корреляции, на основании которой на рисунке графически представлены их величины.

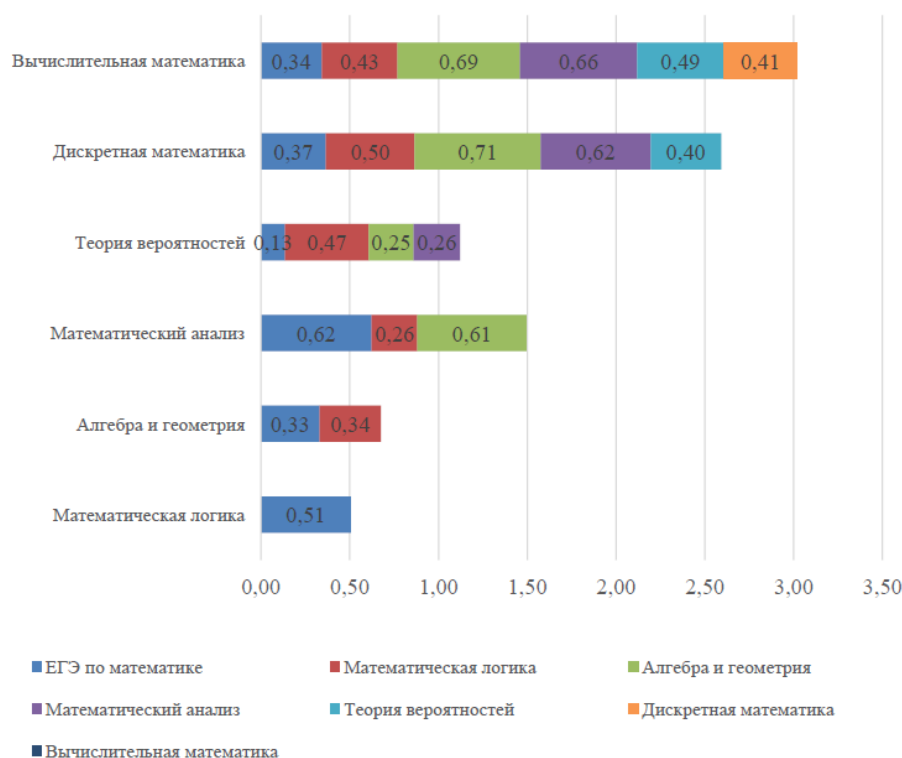


Рис. 1. Величины коэффициентов корреляции математического блока

Анализ результатов расчетов, представленных на рисунке, свидетельствует о низком уровне тесноты связи между дисциплинами математического блока. Средний коэффициент корреляции между дисциплинами математического блока равен 0,47.

Проведенные исследования подтверждают вывод многих работ, посвященных влиянию школьной математики на изучение математических дисциплин в разных вузах, что сегодня уровень получаемых знаний по математическим дисциплинам и теснота связи между ними не являются достаточными. Этот вывод подтверждается и другими показателями [1; 2].

Список литературы

1. Вертешев С. М. Моделирование зависимости показателей знаний инженерных дисциплин от математических дисциплин при подготовке студентов по направлению ИВТ в Псковском государственном университете / С. М. Вертешев, П. В. Герасименко, С. Н. Лехин // Инженерное образование. 2019. № 25. С. 82–91.
2. Вертешев С. М. Роль математики и информатики в подготовке инженеров для инновационной деятельности / С. М. Вертешев, П. В. Герасименко, С. Н. Лехин // Перспективы развития высшей школы : мат-лы X Международной научно-методической конференции. Гродно : ГГАУ, 2017. С. 223–226.
3. Виноградов Б. А. Системный подход к оценке качества подготовки кадров для ОПК / Б. А. Виноградов, В. Г. Пальмов, Г. П. Мещерякова // Инновация. 2014. № 10 (192). С. 70–79.
4. Ганичева А. В. Математическая модель оценки качества обучения // В мире научных открытий. 2015. № 6.1 (66). С. 313–326.
5. Ганичева А. В. Оценка эффективности процесса обучения // Интеллект. Инновации. Инвестиции. 2011. № 2. С. 134–137.
6. Герасименко П. В. Математическое моделирование процесса изучения учебных многосеместровых дисциплин в технических вузах / П. В. Герасименко, Е. А. Благовещенская, В. А. Ходаковский // Известия Петербургского государственного университета путей сообщения. 2017. Т. 14. № 3. С. 513–522.
7. Изосимова Т. Н. Компетентностный подход как гарантия качества подготовки современных специалистов в области IT-технологий / Т. Н. Изосимова, Л. В. Рудикова // Научные труды Академии управления при Президенте Республики Беларусь. Минск : Акад. упр. при Президенте Респ. Беларусь, 2014. Вып. 16 : в 2 ч. Ч. I. Экономика. 502 с.
8. Поличка А. Е. Особенности проектирования инновационной инфраструктуры подготовки кадров информатизации региональной системы образования в условиях функционирования информационно-коммуникационной предметной среды : монография. Хабаровск : ДВГУПС, 2015. 86 с.
9. Русаков А. А. Методологические проблемы обучения математике : мат-лы Международной научно-практической конференции «Физико-математическое образование: цели, достижения и перспективы» (10–13 мая 2017 г.). Минск : Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка, 2017. С. 17–23.
10. Уразаева Л. Ю., Дацун Н. Н. Проблемы математического образования и их решение // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2015. № 3 (30). С. 57–63.

On methodological aspects of determining the indicators of the quality of knowledge formed by students in mathematical disciplines in technical universities

Gerasimenko Pyotr Vasilyevich

Doctor of Technical Sciences, professor, St. Petersburg State University of Railways of Emperor Alexander I. Russia, St. Petersburg. ORCID: 0000-0002-7546-661X. Scopus Author ID: 7005769656. E-mail: pv39@mail.ru

Abstract. The quantitative indicators of mathematical knowledge of students formed at the university are substantiated. The first indicator characterizes the level of knowledge of the content of the discipline. Its quantitative value is determined by the individual examination grades of students and the average assessment of the student team. The second indicator characterizes the density of interdisciplinary communication between mathematical disciplines. It is measured by the value of the correlation coefficient between a pair of disciplines within a block of mathematical disciplines and the average correlation coefficient of all disciplines in the block. An example of determining the closeness of knowledge between mathematical disciplines studied by bachelors of the direction of training "computer science and computer engineering" of Pskov State University is given.

Keywords: mathematical disciplines, USE, regression, elementary and higher mathematics, correlation.

References

1. Verteshev S. M. *Modelirovanie zavisimosti pokazatelej znaniy inzhenernykh disciplin ot matematicheskikh disciplin pri podgotovke studentov po napravleniyu IVT v Pskovskom gosudarstvennom universitete* [Modeling of the dependence of knowledge indicators of engineering disciplines on mathematical disciplines in the preparation of students in the direction of IVT at Pskov State University] / S. M. Verteshev, P. V. Gerasimenko, S. N. Lekhin // *Inzhenernoe obrazovanie – Engineering education*. 2019. No. 25. Pp. 82–91.
2. Verteshev S. M. *Rol' matematiki i informatiki v podgotovke inzhenerov dlya innovatsionnoy deyatel'nosti* [The role of mathematics and computer science in the training of engineers for innovation] / S. M. Verteshev, P. V. Gerasimenko, S. N. Lekhin // *Perspektivy razvitiya vysshej shkoly : mat-ly H Mezhdunarodnoj nauchno-metodicheskoy konferencii* – Prospects for the development of higher education : materials of the X International Scientific and Methodological Conference. Grodno. GSAU. 2017. Pp. 223–226.
3. Vinogradov B. A. *Sistemnyy podhod k ocenke kachestva podgotovki kadrov dlya OPK* [A systematic approach to assessing the quality of personnel training for the defense industry] / B. A. Vinogradov, V. G. Palmov, G. P. Meshcheryakova // *Innovatsiya – Innovation*. 2014. No. 10 (192). Pp. 70–79.
4. Ganicheva A. V. *Matematicheskaya model' ochenki kachestva obucheniya* [Mathematical model for assessing the quality of education] // *V mire nauchnykh otkrytij* – In the world of scientific discoveries. 2015. No. 6.1 (66). Pp. 313–326.
5. Ganicheva A. V. *Ocenka effektivnosti processa obucheniya* [Evaluation of the effectiveness of the learning process] // *Intellekt. Innovatsii. Investitsii* – Intelligence. Innovation. Investment. 2011. No. 2. Pp. 134–137.
6. Gerasimenko P. V. *Matematicheskoe modelirovanie processa izucheniya uchebnykh mnogosemestrovnykh disciplin v tekhnicheskikh vuzakh* [Mathematical modeling of the process of studying multi-semester academic disciplines in technical universities] / P. V. Gerasimenko, E. A. Blagoveshchenskaya, V. A. Khodakovskiy // *Izvestiya Peterburgskogo gosudarstvennogo universiteta putej soobshcheniya* – News of the St. Petersburg State University of Railway Transport. 2017. Vol. 14. No. 3. Pp. 513–522.
7. Izosimova T. N. *Kompetentnostnyy podhod kak garantiya kachestva podgotovki sovremennykh specialistov v oblasti IT-tekhnologiy* [Competence approach as a guarantee of the quality of training of modern specialists in the field of IT technologies] / T. N. Izosimova, L. V. Rudikova // *Nauchnye trudy Akademii upravleniya pri Prezidente Respubliki Belarus'* – Scientific works of the Academy of Management under the President of the Republic of Belarus. Minsk. Akad. upr. under the President of the Republic. Belarus. 2014. Is. 16 : in 2 parts. Part I. Economy. 502 p.
8. Polichka A. E. *Osobennosti proektirovaniya innovatsionnoy infrastruktury podgotovki kadrov informatizatsii regional'noy sistemy obrazovaniya v usloviyakh funkcionirovaniya informacionno-kommunikatsionnoy predmetnoy sredy : monografiya* [Features of the design of the innovative infrastructure of personnel training for the informatization of the regional education system in the context of the functioning of the information and communication subject environment : monograph]. Khabarovsk. Far Eastern State University of Railway Engineering. 2015. 86 p.
9. Rusakov A. A. *Metodologicheskie problemy obucheniya matematike : mat-ly Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii "Fiziko-matematicheskoe obrazovanie: celi, dostizheniya i perspektivy" (10–13 maya 2017 g.)* [Methodological problems of teaching mathematics : materials of the International Scientific and Practical Conference "Physical and mathematical education: goals, achievements and prospects" (May 10–13, 2017)]. Minsk. M. Tank Belarusian State Pedagogical University. 2017. Pp. 17–23.
10. Urazaeva L. Yu., Dacun N. N. *Problemy matematicheskogo obrazovaniya i ih reshenie* [Problems of mathematical education and their solution] // *Vestnik Permskogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika* – Herald of Perm University. Series: Mathematics. Mechanics. Computer science. 2015. No. 3 (30). Pp. 57–63.

Предметная неделя по математике как средство развития творческого потенциала школьников

Игнатова Ольга Григорьевна¹, Соколова Анна Николаевна²

¹заместитель директора по учебно-воспитательной работе, учитель математики, Быковская школа № 14.

Россия, г. Раменское. ORCID: 0000-0002-0185-9744. E-mail: ollik8@yandex.ru

²кандидат педагогических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики,

Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-7619-0627. E-mail: junell@inbox.ru

Аннотация. В рамках организации внеклассной работы со школьниками требуется нестандартный подход. Рассматривая предметную неделю по математике как форму организации внеклассных мероприятий, требуется учитывать разный уровень способностей, различие интересов и возрастные особенности разных групп учащихся, для которых планируется проведение предметной недели. Реализации целей и задач, а также специфике организации такого рода мероприятий посвящена настоящая статья. Авторами описывается практический опыт проведения предметной недели по математике на базе средней школы в Московской области, представлен примерный перечень мероприятий, охватывающих учеников 1–11-х классов, приводятся конкретные примеры заданий. Обсуждаются некоторые положительные аспекты влияния участия в организации и проведении предметной недели по математике на учащихся и педагогов.

Несмотря на то, что предметная неделя является традиционной и достаточно распространенной формой внеклассной работы, конкретный набор ее мероприятий может варьироваться в зависимости от различных факторов и особенностей конкретной образовательной организации.

Ключевые слова: методика преподавания математики, предметная неделя, внеклассные мероприятия по математике.

Современное школьное образование направлено на всестороннее развитие личности учащихся. Значимую роль в образовательном процессе играют внеклассные мероприятия, которые являются неотъемлемой частью учебно-воспитательной работы в школе.

По математике в рамках внеклассной работы существует целый спектр видов деятельности: различные математические эстафеты, кружки, конференции, олимпиады, КВН, марафоны [5]. Как правило, к таким мероприятиям привлекаются ученики, имеющие хорошие способности в области точных наук и с высокой мотивацией к их изучению.

Одной из форм организации внеклассных мероприятий являются предметные недели, которые позволяют привлечь учащихся с разным уровнем способностей, различных возрастных групп и с совершенно различными интересами.

Целью предметной недели является выявление одаренных учащихся, развитие их интеллектуальных и творческих способностей, повышение мотивации к учебной деятельности и развитие интереса к математике, расширение кругозора, развитие волевых качеств, профориентация и социализация личности [1].

Предметная неделя нацелена на решение следующих задач [2]:

1) поиск путей повышения качества образовательного процесса через освоение и внедрение в практику работы современных образовательных технологий;

2) создание условий, максимально благоприятствующих получению качественного образования каждым учеником в зависимости от его индивидуальных способностей, наклонностей, культурно-образовательных потребностей;

3) развитие умения самостоятельно определять цели своего обучения, ставить и формулировать для себя новые задачи в учебе, повышать мотивацию и интерес к познавательной деятельности;

4) развитие умения самостоятельно планировать пути достижения целей, в том числе альтернативные, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных и познавательных задач.

Планирование и подготовка мероприятий предметной недели оказывает положительное влияние не только на обучаемых, но и на педагогов школы, поскольку у них появляется реальная возможность проявить свой творческий потенциал. Кроме того, привлечение к мероприятиям учителей-предметников по дисциплинам, не имеющим прямого отношения к предметной неделе, способствует улучшению психологического климата в коллективе, создает дополнительные каналы коммуникации между педагогами.

Поскольку предметная неделя по математике является очень насыщенным событием, подготовка к ней начинается заранее с составления плана мероприятий. Для привлечения большего числа учащихся план мероприятий включает в себя максимально разнообразную деятельность: решение практических задач из повседневности, работу с терминологией и историей математических фактов, рисование, декоративно-прикладное искусство и прочее. Ее спектр практически не ограничен.

Примерный перечень мероприятий, которые могут быть проведены в рамках недели математики, представлен в таблице 1.

Таблица 1

Мероприятия, которые могут быть проведены в рамках недели математики

Мероприятие	Участники
Конкурс плакатов на тему «На острие науки»	5–11 классы
Конкурс макетов многогранников (поделки из бумаги, пластилина и других материалов)	1–5 классы
Викторина по математике «Мы это знаем!»	9–11 классы, команда 5 человек
Соревнования по устному счету	2–5 классы (по 3 человека от класса)
Соревнования по счету на калькуляторе	6–11 классы (по 3 человека от класса)
Турнир среди учащихся 4–5-х классов «Умники и умницы»	4–5 класс
Турнир среди учащихся 6–7-х классов «Математический калейдоскоп»	6–7 классы
Устный журнал «Математика в нашей жизни»	1–4 класс
«Геометрическая регата»	7–8 классы (команда не более 5 человек)

Из таблицы 1 можно видеть, что к участию в мероприятиях привлекаются ученики 1–11-х классов. Важную роль в успешном проведении предметной недели играет комплексный подход к организации, который учитывает возраст учащихся, их интересы. При формировании команды ее размер подбирается так, чтобы каждый участник в полной мере ощутил свою ценность для коллективного творчества. Кроме того, положительное влияние на атмосферу оказывает привлечение учащихся старших классов к организации и проведению мероприятий для начальной школы. Естественно, деятельность старшеклассников координируется и проверяется учителем.

Возможно варьировать формы проведения мероприятий. Например, викторину по математике «Мы это знаем!» можно проводить как в традиционной очной форме в аудитории, так и дистанционно на специализированных платформах, таких как *myQuiz* и тому подобных.

Другим интересным вариантом командных соревнований являются математические регаты, которые стали популярны в конце XX в. в Москве, а затем – по всей России [4]. Так, одним из заданий геометрической регаты может выступать следующее: используя данные измерительные приборы и объекты, измерить необходимые величины с заданной точностью. В качестве измеряемых величин предлагаются толщина учебника по математике, высота парты, периметр, площадь кабинета и прочее.

На другой станции предлагается геометрический диктант, проверяющий, знают ли ученики, как правильно пишутся математические термины. Примерный список терминов: точка, луч, отрезок, угол, треугольник, прямоугольник, радиус, окружность, квадрат, куб, медиана, высота, биссектриса, параллелепипед, параллельные прямые, чертеж, масштаб, серединный перпендикуляр, симметрия.

Еще один пример задания регаты: дана развертка куба. Определить куб, который ей соответствует (рис. 1).

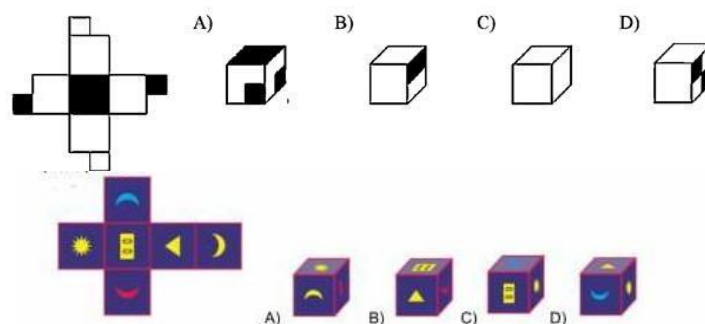


Рис. 1. Задание регаты

На станциях также могут быть предложены задания, требующие проявить навык конструирования фигур из заданных элементов. Например, требуется сложить прямоугольник из шести других прямоугольников так, чтобы любые два соседних примыкали друг к другу разными по длине сторонами. Решением может служить прямоугольник, представленный на рисунке 2.

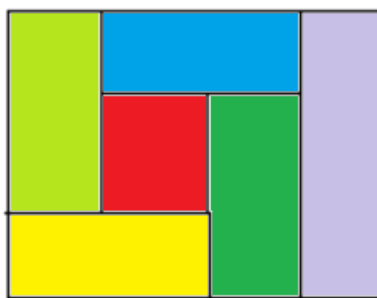


Рис. 2. Решение задания

Учащимся среднего звена можно предложить задания на сообразительность. Пример такого задания: одной кривой перечеркнуть ребра фигур так, чтобы через каждое ребро линия проходила только один раз (рисунок 3).

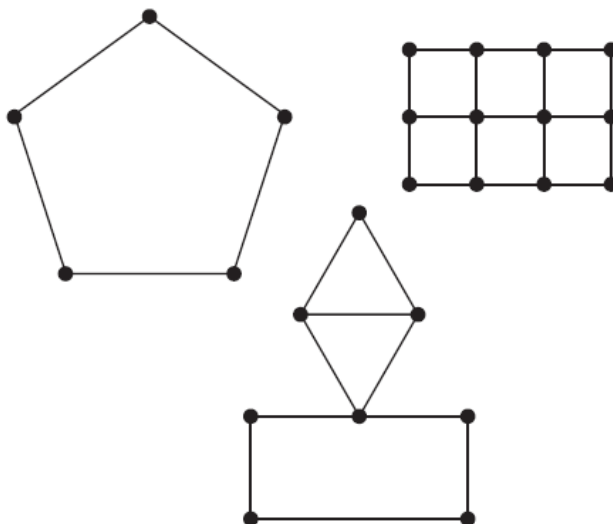


Рис. 3. Задание на сообразительность

Еще одним мероприятием, которое может заинтересовать учеников практически с любым уровнем подготовки по математике, – соревнования по счету на калькуляторе. Участникам предлагается решить ряд примеров за ограниченное время, например, за 20 минут. Победителем считается участник, который за минимальное время правильно выполнил все вычисления.

Примеры заданий для соревнования:

- 1) $64 \cdot (120 + 456)$;
- 2) $(1266 - 954) : 78 - 1582 : (2563 - 1772)$;
- 3) $(18 + 12^2)^2 + 27^3$;
- 4) $(5^3 + 3^2)^3 - (3^6 + 4^3)^2$;
- 5) $\left(3\frac{2}{5} - 1\frac{1}{2}\right) \div \frac{1}{3}$;
- 6) $\frac{\left(\frac{9}{10} + 3\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}\right) \div \frac{1}{2}}{\frac{4}{3}}$;
- 7) $\frac{4}{5} \cdot \left(2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} \div \frac{5}{2}\right)$.

На Московской математической регате предлагалась следующая задача [4, с. 23]. Из спичек сложено неверное равенство (рисунок 4). Переложите одну спичку так, чтобы равенство стало верным.

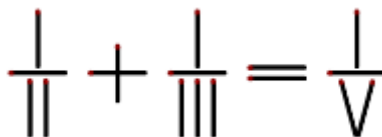


Рис. 4. Задача со спичками

Внеклассная работа гораздо разнообразнее традиционного учебного процесса, поскольку позволяет использовать различные формы организации взаимодействия учеников и образовательной среды. Конечно, мероприятия предметной недели не являются обязательными, однако участие в них даже в составе команды от класса позволяет каждому обучающемуся ощутить причастность к общему делу. И хотя период длительного дистанционного обучения остался в прошлом, он существенно повлиял на предпочтения в способе коммуникации у школьников, поэтому сейчас очень важно возродить у них умение общаться без «технических посредников», коллективный дух, азарт к обучению, смелость и умение проявить свои творческие способности в нестандартной ситуации.

Предметные недели являются мощным средством мотивации учебной деятельности школьников [3]. Математика становится не просто учебным предметом, одним из многих и не всегда любимым обучающимися. Уроки математики и предметная неделя выступают как уникальная коммуникативная среда, в которой каждый имеет возможность самореализоваться, самовыражаться, самоутверждаться, расти творчески и духовно.

Еще одним важным аспектом является то, что при подготовке к предметной неделе начинающие и опытные педагоги получают возможность в полной мере раскрыть свои лидерские качества, поделиться опытом, проявить мастерство и креативность, продемонстрировать профессиональную зрелость. Особенно это актуально для молодых учителей, чей педагогический путь только начинается [2].

Таким образом, проведение предметных недель по математике имеет следующие преимущества.

1. *Вариативность*: различная направленность мероприятий позволяет использовать нестандартные задания, активно привлекать межпредметные связи и творчество.

2. *Ограниченность по времени*: предметная неделя проводится в определенные сроки, заранее утвержден план и регламент проведения мероприятий. В течение достаточно короткого срока вся школа «живет» математикой, объединяя педагогов-предметников и учеников в единую творческую группу.

3. *Нестандартные и увлекательные формы организации*: разнообразие мероприятий позволяет учащимся выйти за рамки обыденности, дает возможность проявить свои творческие возможности, узнать много интересной и полезной информации, поделиться своими результатами с учениками из других классов, наладить общение.

4. *Открытость*: учителя могут сами варьировать мероприятия, предлагать новые формы их проведения, к организации мероприятий предметной недели можно привлекать учителей других дисциплин и самих учащихся.

5. *Адаптивность*: при организации мероприятий учитываются особенности конкретного школьного коллектива, численность учеников, возможности материальной базы, интересы педагогов.

6. *Дифференцированность*: план мероприятий разрабатывается таким образом, чтобы охватить максимальное число участников.

Практика проведения предметных недель по математике показывает, что благодаря им эффективно решаются задачи мотивации в индивидуальной и коллективной деятельности, развивается самостоятельность школьников, формируются межличностные коммуникации, а также раскрывается творческий потенциал как учеников, так и педагогов.

Нестандартные формы организации мероприятий приводят к раскрепощению личности учащихся, формированию у них умения определить свое место в жизни, проявить свои способности, стать нужным и полезным людям, а это и есть главный результат педагогической работы.

Список литературы

1. Дружинин В. И. Методическая работа в образовательном учреждении // Народное образование. 2013. № 10. С. 131–140.
2. Игнатова О. Г., Соколова А. Н. Особенности проведения предметной недели как средства популяризации математики среди учеников школы // Математика и проблемы образования : мат-лы 41-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. Киров, 2022. С. 221–223.
3. Кочеткова Н. Н. Предметная неделя как средство мотивации учебной деятельности школьников // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2015. № 11–4. С. 32–35.

4. Московские математические регаты / сост. А. Блинков. М. : МЦНМО, 2001. URL: <https://olympiads.mccme.ru/regata/regaty.pdf> (дата обращения: 27.06.2022).

5. Сборник рабочих программ по внеурочной деятельности начального, основного и среднего общего образования : учеб. пособие для общеобразоват. организаций. М. : Просвещение, 2020. 313 с.

Subject week in mathematics as a means of developing the creative potential of schoolchildren

Ignatova Olga Grigorievna¹, Sokolova Anna Nikolaevna²

¹deputy director for educational work, mathematics teacher, Bykovskaya school No. 14.

Russia, Ramenskoye. ORCID: 0000-0002-0185-9744. E-mail: ollik8@yandex.ru

²PhD in Pedagogical Sciences, associate professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-7619-0627. E-mail: junell@inbox.ru

Abstract. As part of the organization of extracurricular work with schoolchildren, a non-standard approach is required. Considering the subject week in mathematics as a form of organization of extracurricular activities, it is necessary to take into account the different level of abilities, differences in interests and age characteristics of different groups of students for whom the subject week is planned. This article is devoted to the implementation of goals and objectives, as well as the specifics of organizing such events. The authors describe the practical experience of conducting a subject week in mathematics on the basis of a secondary school in the Moscow region, an approximate list of activities covering students in grades 1–11 is presented, specific examples of tasks are given. Some positive aspects of the impact of participation in the organization and conduct of the subject week in mathematics on students and teachers are discussed.

Despite the fact that the subject week is a traditional and fairly common form of extracurricular work, the specific set of its activities may vary depending on various factors and characteristics of a particular educational organization.

Keywords: methods of teaching mathematics, subject week, extracurricular activities in mathematics.

References

1. Druzhinin V. I. *Metodicheskaya rabota v obrazovatel'nom uchrezhdenii* [Methodical work in an educational institution] // *Narodnoe obrazovanie* – National education. 2013. No. 10. Pp. 131–140.

2. Ignatova O. G., Sokolova A. N. *Osobennosti provedeniya predmetnoj nedeli kak sredstva populyarizatsii matematiki sredi uchениkov shkoly* [Features of the subject week as a means of popularizing mathematics among school students] // *Matematika i problemy obrazovaniya : mat-ly 41-go Mezhdunarodnogo nauchnogo seminara prepodavatelej matematiki i informatiki universitetov i pedagogicheskikh vuzov* – Mathematics and problems of education : materials of the 41st International Scientific Seminar of teachers of Mathematics and Computer science of universities and pedagogical universities. Kirov. 2022. Pp. 221–223.

3. Kochetkova N. N. *Predmetnaya nedelya kak sredstvo motivatsii uchebnoy deyatel'nosti shkol'nikov* [Subject week as a means of motivating students' learning activities] // *Aktual'nye problemy gumanitarnykh i estestvennykh nauk* – Actual problems of humanities and natural sciences. 2015. No. 11–4. Pp. 32–35.

4. *Moskovskie matematicheskie regaty* – Moscow Mathematical regattas / comp. A. Blinkov. M. ICNMO, 2001. Available at: <https://olympiads.mccme.ru/regata/regaty.pdf> (date accessed: 27.06.2022).

5. *Sbornik rabochih programm po vneurochnoy deyatel'nosti nachal'nogo, osnovnogo i srednego obshchego obrazovaniya : ucheb. posobie dlya obshcheobrazovat. organizatsij* – Collection of work programs on extracurricular activities of primary, basic and secondary general education : studies. a manual for general education. organizations. M. Prosveshchenie (Enlightenment). 2020. 313 p.

О системе подготовительных упражнений для решения задач на построение в пространстве

Леонтьева Наталия Владимировна

кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и информатики,
Глазовский государственный педагогический институт им. В. Г. Короленко.
Россия, г. Глазов. ORCID: 0000-0001-9716-907X. E-mail: leonteva-natalia-0812@yandex.ru

Аннотация. Изучение конструктивной геометрии в пространстве предполагает знакомство с основными инструментами и базовыми построениями. Обучение решению задач требует предварительной подготовки. В связи с этим возникает необходимость в создании дополнительных заданий. Цель работы состоит в описании системы упражнений, направленных на подготовку обучающихся к решению задач на построение в пространстве. С их помощью формируются у обучающихся представления о возможностях инструментов пространственных построений. Основное внимание при этом следует уделять рассмотрению различных случаев, при которых можно выполнить построение. Применение базовых построений дополняет основные инструменты. Кроме того, решение подобных упражнений дает возможность понять логику выполнения основных действий над построенными объектами. Умение применять инструменты и базовые построения создает основы для дальнейшего обучения решению задач на построение в пространстве.

Ключевые слова: конструктивная геометрия в пространстве, задачи на построение в пространстве, инструменты построений, базовые построения, система упражнений.

Одним из наиболее сложных разделов школьного курса математики является стереометрия. В соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом обучающиеся должны владеть основными понятиями о пространственных фигурах, их основных свойствах, уметь распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры [3]. Составной частью такой подготовки является обучение конструктивной геометрии. В школьный курс включаются вопросы обучения решению задач на построение на плоскости.

Задачи на построение, как отмечает В. А. Далингер, способствуют формированию логического мышления, пространственных представлений, алгоритмической культуры [1, с. 40]. Их включение в школьный курс геометрии способствует формированию умений решать геометрические задачи. Соответственно изучение аналогичных вопросов в рамках курса стереометрии дает возможность совершенствовать геометрические представления обучающихся. Однако в курсе стереометрии подобные вопросы практически не рассматриваются. В связи с этим изучение указанной темы возможно в рамках дополнительных элективных курсов.

Базовая основа конструктивной геометрии в пространстве описана в работе [2]. За основу в соответствии с предложенными автором идеями выберем следующие инструменты: линейку, плоскограф и сферограф. После их изучения введем в рассмотрение основные действия над построенными объектами, которые будем называть базовыми построениями. К их числу отнесем [2, с. 24]:

- Б1 (можно выбрать произвольную точку, принадлежащую построенной фигуре);
- Б2 (можно выбрать произвольную точку, не принадлежащую построенной фигуре);
- Б3 (можно выбрать любое конечное число точек, принадлежащее пересечению двух построенных фигур);
- Б4 (можно построить линию пересечения двух плоскостей);
- Б5 (можно построить линию пересечения плоскости и сферы);
- Б6 (можно построить линию пересечения двух сфер).

Опираясь на выделенные инструменты и базовые построения, мы можем решать различные задачи. Однако в процессе обучения возникает вопрос о том, каким образом можно ввести указанные выше понятия, чтобы в дальнейшем было проще обучать школьников решению задач на построение в пространстве.

При изучении основных инструментов и базовых построений следует учитывать два основных момента. Во-первых, они могут быть введены фактически как аксиомы, что предполагает принятие данных утверждений без обоснования. Во-вторых, пространственные инструменты не имеют физического воплощения и могут быть реализованы только в виде мысленного эксперимента. При их использовании мы не просто говорим о существовании полученных в результате объектов, а предполагаем, что они могут быть воплощены в некотором виртуальном пространстве.

Построения на плоскости реализуемы в силу физического существования соответствующих инструментов. Для пространственного случая цифровое моделирование, основанное на применении прикладных математических пакетов. В частности, программа GeoGebra дает возможность продемонстрировать, как могут выглядеть результаты применения линейки, плоскографа и сферографа, что позволяет визуализировать результаты построения, а также показать результаты применения базовых построений.

Прежде чем, собственно, переходить к решению задач, желательно выполнить с обучающимися ряд предварительных упражнений, позволяющих лучше понять базовые основы пространственных построений.

В первую очередь желательно разобрать с обучающимися различные случаи, определяющие возможность построения объектов с помощью инструментов. С этой целью можно им предложить следующие упражнения.

1. В пространстве даны 4 точки A, B, C, D , не лежащие в одной плоскости. Проведите через них всевозможные прямые. Сколько прямых можно построить?

2. В условиях предыдущей задачи проведите через данные точки всевозможные плоскости. Сколько плоскостей можно провести?

3. Даны три точки A, B, C . Проведите сферы так, чтобы одна из точек была ее центром, а радиус был равен длине отрезка, образованного двумя другими. Сколько сфер, удовлетворяющих таким условиям, можно провести?

Данные упражнения можно выполнить мысленно, для этого достаточно назвать основные объекты, которые получаются при построении. При их выполнении важно подчеркнуть, что в пространстве в силу виртуальности применяемых инструментов указание на искомый объект можно рассматривать как факт выполнения построения этого объекта. Так, в первом упражнении обучающиеся могут считать построенными следующие шесть прямых: AB, AC, AD, BC, BD, CD .

Визуализировать решение данной задачи можно с помощью пакета GeoGebra. Для этого достаточно выбрать четыре произвольные точки и провести через них прямые (рисунок 1).

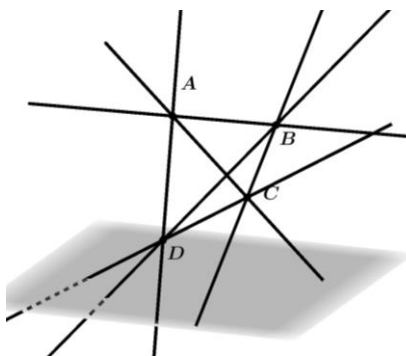


Рис. 1. Возможный случай расположения прямых в пространстве

Возможности программы позволяют продемонстрировать процесс построения, рассмотреть результат с различных ракурсов. Созданный учителем шаблон демонстрируется учащимся только после того, как задача будет решена. В таком случае компьютерная модель служит иллюстрацией, позволяющей подтвердить сделанные предположения.

Следующая серия упражнений направлена на расширение различных случаев применения инструментов, описанных в работе [2]. Особое внимание обучающихся следует обратить на плоскограф. В этом случае можно предложить следующие упражнения.

4. В пространстве даны $AB \parallel CD$, AM скрещивается с прямой CD (рисунок 2). Какие плоскости в таких условиях можно провести?

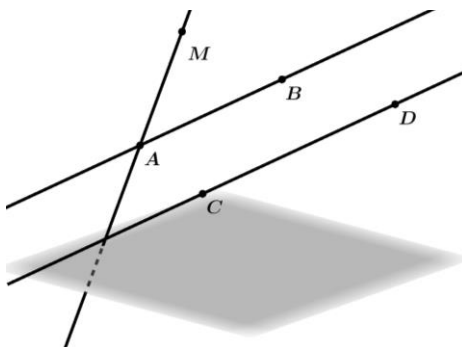


Рис. 2. Исходные данные к заданию

5. Проведите через четыре данные точки A, B, C, D , не лежащие в одной плоскости, всевозможные сферы так, чтобы одна из точек была центром, а вторая лежала на ее поверхности. Сколько сфер можно провести?

Построение пространственных объектов желательно сопровождать пояснениями, обосновывающими такую возможность. В частности, обратим внимание учащихся на то, что по определению параллельности прямых AB и CD через них можно провести плоскость.

Изменение конфигурации исходных объектов позволяет составлять различные упражнения, направленные на понимание тех случаев, когда применение инструментов дает возможность провести пространственные фигуры. Умение видеть условия, при которых построение возможно, представляет собой основу для дальнейшего решения задач.

Следующая серия упражнений направлена на формирование умений применять базовые построения. К их числу отнести такие задачи.

6. Дана плоскость ABC . Выберите точку M , лежащую в этой плоскости, а также точку N , не лежащую в ней. Проведите прямую MN . Проведите плоскости ABN , CMN . Пересекаются ли данные в задаче плоскости? Пересекаются ли прямая AB и плоскость CMN ?

7. Из точки K на плоскость ABC опущен перпендикуляр, основанием которого является точка H . Постройте сферы $\Omega_1(A, AK)$, $\Omega_2(K, KH)$. Определите, пересекаются ли данные сферы друг с другом и плоскостью ABC ?

8. В условиях предыдущей задачи определите, пересекает ли прямая AN данные сферы?

При решении данных задач основное внимание следовало уделить обоснованию того, пересекаются указанные объекты или нет. Для этого необходимо вспомнить условия, позволяющие определить, пересекаются объекты или нет.

В процессе выполнения подобных упражнений у обучающихся формируются представления о применении инструментов и базовых построений, что формирует основы для дальнейшего обучения решению задач на построение в пространстве. Кроме того, с их помощью школьники учатся проводить доказательство того, что построенные объекты удовлетворяют заданным условиям.

Список литературы

1. Далингер В. А. Геометрия: планиметрические задачи на построение : учеб. пособие для вузов. М. : Юрайт, 2021. 155 с. URL: <https://urait.ru/bcode/473822> (дата обращения: 10.06.2022).
2. Леонтьева Н. В. Теоретические основы конструктивной геометрии в пространстве // Преподавание математики и информатики в школах и вузах: проблемы содержания, технологии и методики : сб. научных и научно-практических статей VII Всероссийской научно-практической конференции (26–27 ноября 2021 г.) / науч. ред. Е. М. Вечтомов, отв. ред. И. В. Владыкина, Н. В. Леонтьева; Глазовский государственный педагогический институт. Глазов : ГГПИ, 2022. С. 19–25.
3. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования. URL: http://school6.tgl.ru/uploads/files/documents/fgos/fgos_coo_11_12_2020.pdf (дата обращения: 10.06.2022).

About the system of preparatory exercises for solving construction tasks in space

Leontieva Natalia Vladimirovna

PhD in Pedagogical Sciences, associate professor of the Department of Mathematics and Computer Science,
Glazovsky State Pedagogical Institute n. a. V. G. Korolenko.
Russia, Glazov. ORCID: 0000-0001-9716-907X. E-mail: leonteva-natalia-0812@yandex.ru

Abstract. The study of constructive geometry in space involves familiarity with basic tools and basic constructions. Learning to solve problems requires prior preparation. In this regard, there is a need to create additional tasks. The purpose of the work is to describe a system of exercises aimed at preparing students to solve construction tasks in space. With their help, students form ideas about the possibilities of spatial construction tools. The main attention should be paid to the consideration of various cases in which the construction can be performed. The use of basic constructions complements the basic tools. In addition, solving such exercises makes it possible to understand the logic of performing basic actions on constructed objects. The ability to use tools and basic constructions creates the basis for further training in solving problems for building in space.

Keywords: constructive geometry in space, construction tasks in space, construction tools, basic constructions, exercise system.

References

1. Dalingер V. A. *Geometriya: planimetricheskie zadachi na postroenie : ucheb. posobie dlya vuzov* [Geometry: planimetric problems for construction : textbook. manual for universities]. M. Yurayt. 2021. 155 p. Available at: <https://urait.ru/bcode/473822> (date accessed: 10.06.2022).
2. Leont'eva N. V. *Teoreticheskie osnovy konstruktivnoj geometrii v prostranstve* [Theoretical foundations of constructive geometry in space] // *Prepodavanie matematiki i informatiki v shkolah i vuzah: problemy sodержaniya, tekhnologii i metodiki : sb. nauchnyh i nauchno-prakticheskikh statej VII Vserossijskoj nauchno-prakticheskoy konferencii (26–27 noyabrya 2021 g.)* – Teaching mathematics and computer science in schools and universities: problems of content, technology and methodology : collection of scientific and scientific-practical articles of the VII All-Russian Scientific-practical Conference (November 26–27, 2021) / scient. ed. E. M. Vechtomov, ed. I. V. Vladykina, N. V. Leontieva; Glazovsky State Pedagogical Institute. Glazov. GSPI. 2022. Pp. 19–25.
3. Federal State educational standard of secondary general education. Available at: http://school6.tgl.ru/uploads/files/documents/fgos/fgos_coo_11_12_2020.pdf (date accessed: 10.06.2022) (in Russ.).

Применение языка R при изучении прикладной статистики (для студентов нематематических направлений подготовки)

Шубарин Михаил Александрович

кандидат физико-математических наук, доцент, Южный Федеральный Университет.
Россия, г. Ростов-на-Дону. ORCID: 0000-0001-7646-8812. E-mail: mas102@mail.ru

Аннотация. В статье предполагается ответить на следующие вопросы:

1. Что такое прикладная статистика? Следует различать математическую статистику (как математическую дисциплину, служащую теоретической основой последующего анализа данных) и прикладную статистику (которую можно рассматривать как инженерную дисциплину). Прикладная статистика включает в себя полный цикл сбора, хранения, анализа статистических данных и последующую интерпретацию полученной информации.

2. Почему прикладную статистику следует преподавать студентам не математических дисциплин? Потребность в анализе данных возникает в практической деятельности очень далекой от математики. Например, при анализе экономических и социологических данных.

3. Не слишком ли сложно студентам нематематических специальностей учиться программировать? Простой пример анализа данных, а именно успеваемости студентов одного из факультетов ЮФУ. Этот пример может рассматриваться как реализация цикла обработки статистических данных и показать, что получение важной статистической информации можно достигнуть «малой кровью», без использования сложных конструкций языка R.

Ключевые слова: математическая статистика, прикладная статистика, R.

Введение. 1. Прикладная статистика изначально формировалась как инженерная дисциплина и она включает в себя полный цикл обработки статистических данных.

Первый этап. Сбор и хранение статистических данных. На этом этапе должны быть сформулированы конкретные вопросы, ответы на которые будут даны на втором этапе.

Второй этап. Обработка статистических данных.

Третий этап. Анализ полученной информации.

Только на втором этапе предполагается использование методов математической статистики. Но на первом и втором этапе для обработки больших объемов данных необходимо использовать специализированные пакеты программы (STATISTICA, SPSS, MiniTab или в крайнем случае MS Excel). В [1] предлагалось рассматривать прикладную статистику как раздел кибернетики. Краткая история становления прикладной статистики в СССР содержится в [3].

Научной дисциплины с названием «Прикладная статистика» не существует. Но существуют дисциплины с названиями «Прикладная статистика для экономики» (или эконометрика), «Прикладная статистика для социологии», «Прикладная статистика для физики» и так далее. Эти дисциплины различаются методами, возникающими на первом и втором этапах.

2. Нет однозначного ответа на вопрос «Какая система обработки статистических данных лучше?» Все зависит от затрат времени на изучение этой системы, сложности ввода данных и последующего анализа полученных результатов. После некоторых колебаний автор остановился на языке программирования R. Разумеется, сделанный выбор является достаточно субъективным и отражает личные предпочтения автора. Но возникает вопрос: как показать студентам нематематических дисциплин (например, социологам), что изучение языка программирования – это не больно. С точки зрения автора, есть два уровня применения этого языка. На первом уровне (он вполне доступен студентам) можно использовать стандартные функции, встроенные в этот язык, и не нуждается в сложном программировании. В рамках статьи будет рассмотрен пример анализа статистических данных. Будет показано, как средствами языка R могут быть решены следующие задачи:

1. Хранение статистических данных;

2. Описательная статистика;

3. Проверка статистических гипотез о типе распределения неизвестной случайной величины.

Следует обратить внимание на то, что выделяют два типа статистических гипотез: параметрические и непараметрические. В классической математической статистике считается известным распределение исследуемой случайной величины. Например, считается допустимым предположе-

ние о нормальности этой случайной величины. Но как показывают статистические эксперименты [4], это предположение далеко не всегда соответствует действительности. Были разработаны методы проверки статистических гипотез, свободных от распределения, мощность которых сопоставима с методами проверки параметрических статистических гипотез.

Пример данных. В качестве модельной выборки взята успеваемость одной из групп, в которой автор ведет курс математики. Следует отметить, что информация об успеваемости студентов ЮФУ собирается, обрабатывается и хранится в БРС (балльно-рейтинговой системе). Взята случайная группа и из БРС выделены баллы, которые определили итоговую оценку студентов: 77 80 62 69 85 78 76 71 62 75 67 72 58 75 65 76 75 73 14 1 67 55 62 80 81 56 2 9 100.

Описательная статистика на R. 1. Помещаем выборку в вектор
`X<-c(77,80,62,69,85,78,76,71,62,75,67,72,58,75,65,76,75,73,14,1,67,55,62,80,81,56,2,9,100)` #1

Комментарии:

1. Выборке (рассматриваемой в математической статистике) в R соответствуют векторы. Аргументами функции `c()` может быть произвольный набор чисел (и не только чисел), возвращает эта функция вектор, элементами которого будут числа из этого набора. В R имеется возможность записывать в вектор данные из внешнего файла.

Отбросим самые малые элементы выборки (говорят, что аномальны с позиции оценивания БРС)
`Y<-X[X>50]` #2
`Y`

```
## [1] 77 80 62 69 85 78 76 71 62 75 67 72 58 75 65 76 75 73 67
## [20] 55 62 80 81 56 100
```

Комментарии:

2. Результат применения операции `[]` к числовой выборке можно рассматривать как фильтр, выделяющий из выборки элементы, удовлетворяющие заданному условию. Например, операция `[X>50]` позволяет выделить из выборки `X` все элементы, которые больше 50.

Находим объем выборки

```
length(Y)
## [1] 25
```

По выборке строим дискретный вариационный ряд

```
table(Y) #3
## Y
## 55 56 58 62 65 67 69 71 72 73 75 76 77 78 80 81 85 100
## 1 1 1 3 1 2 1 1 1 3 2 1 1 2 1 1 1
```

Комментарии:

3. Построенная с помощью функции `table()` таблица содержит три строки:

первая строка – имя выборки (в нашем случае `Y`);

вторая строка – перечислены все уникальные элементы (другими словами – варианты), образующие выборку и выписанные в порядке возрастания;

третья строка – частоты, с которыми встречаются варианты в выборке.

Очевидно, что построенный вариационный ряд не приемлем для дальнейшего использования, так как частота каждой варианты слишком мала. Строим по выборке `Y` интервальный вариационный ряд

```
table(cut(Y, #4
breaks=seq(from=min(Y), #5 #6
to=max(Y),
length.out = 7)))
##
## (55,62.5] (62.5,70] (70,77.5] (77.5,85] (85,92.5] (92.5,100]
## 5 4 9 5 0 1
```

Комментарии:

4. Функция `cut()` делит диапазон изменение элементов выборки `X` (от минимального `min(X)` до максимального `max(X)`) на интервалы, определяемые числовым вектором `break`, и для каждого интервала вычисляет частоту попадания элементов выборки в этот интервал.

5. Функция `seq()` возвращает числовой вектор, определяемый аргументами этой функции. В рассматриваемом примере функция `seq` возвращает вектор, полученный разбиением отрезка `[from,to]` на `length.out` частей одинаковой длины.

6. Построенный интервальный ряд не приемлем для дальнейшего статистического анализа. Это связано с тем, что в двух последних интервалах содержится слишком мало элементов выборки. Поэтому следует объединить три последних столбца в один.

2. Находим точечные оценки выборки

1. Выборочное среднее и медиана

```
mean(Y) #вычисляем эмпирическое среднее исследуемой случайной величины
## [1] 71.88
median(Y) #вычисляем эмпирическую медиану исследуемой случайной величины
## [1] 73
```

2. Квантили заданных уровней

```
quantile(Y,c(0.1,0.3,0.7)) #6
## 10% 30% 70%
## 59.6 67.0 76.0
quantile(Y,c(0,0.25,0.5,0.75,1)) #7
## 0% 25% 50% 75% 100%
## 55 65 73 77 100
quantile(Y,c(0.5)) #8
## 50%
## 73
summary(Y) #9
## Min. 1st Qu. Median Mean 3rd Qu. Max.
## 55.00 65.00 73.00 71.88 77.00 100.00
```

Комментарии:

6. Функция `quantile()` возвращает вектор, образованный эмпирическими квантилями выборки, соответствующие уровням, записанным в списке, который был создан функцией `c()`.

7. Вычисляем эмпирические квантили выборки. Квантилями называют эмпирические квантили выборки, соответствующие уровням 0.25, 0.5 и 0.75.

8. По определению эмпирическая медиана есть квинтиль уровня 0.5.

9. Результат, возвращаемый функцией `summary()`, зависит от типа аргумента. В рассматриваемом случае (для числовой выборки) эта функция вычисляет минимальный и максимальный элемент выборки (`min` и `max`), первую и третью квантиль (`1st Qu.`, `3rd Qu.`), эмпирическую медиану и среднее (`Median`, `Mean`).

3. Выборочное среднееквадратичное

```
sd(Y)
## [1] 10.06777
```

Проверка статистических гипотез в R. Проверим гипотезу о нормальном распределении случайной величины, по которой была построена рассматриваемая выборка. Для проверки статистических гипотез R не использует уровень значимости (то есть вероятность ошибки первого рода). Вместо него функции проверки статистических гипотез возвращают число, называемое Р-значением (P-value или достигнутым уровнем значимости). По определению эта величина равна точной нижней грани уровней значимости, для которых наблюдаемое значение статистики принадлежит критической области (и нулевая гипотеза отвергается как противоречащая эмпирическим данным). Другими словами, если выбранный уровень значимости меньше достигнутого уровня значимости, то можно утверждать согласование нулевой гипотезой с эмпирическими данными.

1. Критерий типа Колмогорова – Смирнова (точнее критерия Колмогорова) основан на исследовании статистики D и реализован в функции `ks.test`

```
ks.test(Y,"pnorm",mean(Y),sd(Y))
## Warning in ks.test.default(Y, "pnorm", mean(Y), sd(Y)): в тесте Колмогорова-
## Смирнова не должно быть повторяющихся значений
##
## Asymptotic one-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data: Y
## D = 0.1025, p-value = 0.9554
## alternative hypothesis: two-sided
```

Величина достигнутого уровня значимости позволяет принять нулевую гипотезу о нормальности рассматриваемой случайной величины (с теоретическим средним и теоретическим стандартным отклонением, оцененным по выборке) не противоречит эмпирическим данным для любого уровня значимости, меньшего 0.95.

С помощью этого критерия можно проверить корректность перехода от выборки X к выборке Y .


```
ks.test(X,Y)
##
## Exact two-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data: X and Y
## D = 0.13793, p-value = 0.8139
## alternative hypothesis: two-sided
```

Вывод: для любого уровня значимости, меньшего 0.81, нулевая гипотеза о совпадении функций распределения случайной величины, по которой были построены выборки X и Y, не противоречит эмпирическим данным.

2. Критерий Шапиро – Уилка

Синтаксис функции `shapiro.test`: `shapiro.test(x)`, x – выборка, задаваемая числовым вектором.

Возвращаемые значения (и название поля, в котором записано это значение):

1. W – наблюдаемое значение критерия Шапиро – Уилка;
2. p-value – приближенное значение достигнутого уровня значимости. Реализованная в R аппроксимация приемлема для построения критической области при $p\text{-value} > 0.1$;

Применим критерий Шапиро – Уилка к рассматриваемой выборке.

```
Y.sht<-shapiro.test(Y)
Y.sht
##
## Shapiro-Wilk normality test
##
## data: Y
## W = 0.95459, p-value = 0.3172
```

Анализируем полученные данные:

2. Наблюдаемое значение критерия Шапиро – Уилка

```
## [1] "W= 0.9546"
```

3. Значение (или оценка, если значение этого числа мало) достигнутого уровня значимости

```
## [1] "p_value= 0.3172"
```

Вывод: гипотеза о нормальности распределения λ не противоречит имеющимся данным для любого уровня значимости, меньшего 0.3.

Заключение Автор надеется, что его попытка демонстрации возможностей применения языка R студентами не математических специальностей была удачной, хотя бы отчасти.

Объем статьи не позволяет показать другие возможности этого языка. Например, визуализация данных, начиная с построения полигонов и гистограмм и заканчивая ящиком-с-усами.

Пример, разобранный в статье, написан по мотивам примеров из [3] и опирается на справочник по функциям языка R [4].

Предлагаемая статья сгенерирована средствами языка R с использованием языка разметки текстов RMarkdown.

Список литературы

1. Орлов А. И. О развитии прикладной статистики // Современные проблемы кибернетики (прикладная статистика). М. : Знание, 1981. С. 3–13.
2. Шипунов А. Б., Балдин Е. М., Волкова П. А. Наглядная статистика. Используем R! Системные требования Adobe Acrobat Reader. URL: <http://ashipunov.info/shipunov/software/r/r-ru.htm> (дата обращения: 01.07.2022).
3. Kotz S., Smith K. The Hausdorff Space and Applied Statistics: A View from the U.S.S.R. // The American Statistician. 1988. Vol. 42. No. 4 (Nov.). Pp. 241–244.
4. The R Core Team. R: A Language and Environment for Statistical Computing, Version 3.6.1 from 2019-07-05. System requirements Adobe Acrobat Reader. URL: <https://cran.r-project.org/manuals.html> (дата обращения: 01.07.2022).

The use of the R language in the study of applied statistics (for students of non-mathematical fields of study)

Shubarin Mikhail Aleksandrovich

PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor, Southern Federal University.
Russia, Rostov-on-Don. ORCID: 0000-0001-7646-8812. E-mail: mas102@mail.ru

Abstract. The article is supposed to answer the following questions:

1. What is applied statistics? It is necessary to distinguish between mathematical statistics (as a mathematical discipline that serves as a theoretical basis for subsequent data analysis) and applied statistics (which can be considered as an engineering discipline). Applied statistics includes a full cycle of collection, storage, analysis of statistical data and subsequent interpretation of the information received.

2. Why should applied statistics be taught to students of non-mathematical disciplines? The need for data analysis arises in practical activities very far from mathematics. For example, when analyzing economic and sociological data.

3. Isn't it too difficult for students of non-mathematical specialties to learn programming? A simple example of data analysis, namely, the academic performance of students from one of the faculties of SFU. This example can be considered as an implementation of the statistical data processing cycle and show that obtaining important statistical information can be achieved with "little blood", without using complex constructions of the R language.

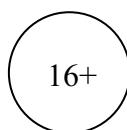
Keywords: mathematical statistics, applied statistics, R.

References

1. Orlov A. I. *O razvitii prikladnoj statistiki* [On the development of applied statistics] // *Sovremennye problemy kibernetiki (prikladnaya statistika)* – Modern problems of Cybernetics (applied statistics). M. Znanie (Knowledge). 1981. Pp. 3–13.
2. Shipunov A. B., Baldin E. M., Volkova P. A. *Naglyadnaya statistika. Ispol'zuem R! Sistemnye trebovaniya Adobe Acrobat Reader* [Visual statistics. Use R! System requirements Adobe Acrobat Reader]. Available at: <http://ashipunov.info/shipunov/software/r/r-ru.htm> (date accessed: 01.07.2022).
3. Kotz S., Smith K. The Hausdorff Space and Applied Statistics: A View from the U.S.S.R. // *The American Statistician*. 1988. Vol. 42. No. 4 (Nov.). Pp. 241–244.
4. The R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, Version 3.6.1 from 2019-07-05. System requirements Adobe Acrobat Reader. Available at: <https://cran.r-project.org/manuals.html> (date accessed: 01.07.2022).

Математический вестник Вятского государственного университета

Научный журнал № 4 (27) (2022)



Вятский государственный университет,
610000, г. Киров, ул. Московская, 36
(8332) 208-964