МАТЕМАТИКА

УДК 512.56 EDN: GNOPCQ

О числе ретракций прямого произведения двух конечных цепей*

Вечтомов Евгений Михайлович[1], Петров Андрей Александрович[2]
[1]доктор физико-математических наук, профессор, научный сотрудник кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров.
ORCID: 0000-0002-3490-2956. E-mail: vecht@mail.ru
[2]кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-5877-2850.
E-mail: apetrov43@mail.ru

Аннотация. В работе исследуются ретракции прямого произведения двух конечных цепей. Под ретракцией решетки A понимается идемпотентный гомоморфизм A в себя. Найдена и доказана формула для подсчета числа всех ретракций прямого произведения двухэлементной цепи на n-элементную цепь.

Ключевые слова: ретракция, n-элементная цепь, числа Фибоначчи, прямое произведение цепей.

1. Введение. Исходные понятия. Основным результатом работы является формула (20) для числа всех ретракций прямого произведения двухэлементной цепи и n-элементной цепи. Также отметим новое доказательство теоремы А о числе всех ретракций произвольной конечной цепи, в котором применяются вспомогательные функции, представляющие самостоятельный интерес.

Полурешеткой называется идемпотентная коммутативная полугруппа. Если в полурешетке $\langle A, +\rangle$ задать бинарное отношение $\leq$ формулой: $a\leq b\Leftrightarrow a+b=b$ для любых $a, b\in A$, то получим упорядоченное множество $\langle A, \leq\rangle$, в котором $a+b=\sup\{a, b\}$ для всех $a, b\in A$, называемое *верхней полурешеткой*.

Решеткой называется алгебраическая структура $\langle A, +, \cdot\rangle$, для которой $\langle A, +\rangle$ и $\langle A, \cdot\rangle$ – полурешетки и операции сложения + и умножения $\cdot$ связаны законами поглощения $x+xy=x$ и $x(x+y)=x$. При этом соответствующая полурешетке $\langle A, +\rangle$ верхняя полурешетка $\langle A, \leq\rangle$ удовлетворяет равенству $a\cdot b=\inf\{a, b\}$ для любых $a, b\in A$. Решетка называется *решеткой с нулем*, если она обладает аддитивно нейтральным (равносильно, мультипликативно поглощающим, наименьшим) элементом 0.

Ретракцией решетки A назовем любой решеточный гомоморфизм e: $A\to A$, такой, что $e(e(x))=e(x)$ для всех $x\in X$. Вместо $e(x)$ будем писать просто ex. Элемент $x\in A$ называется *неподвижным элементом* ретракции e, если $ex=x$, в противном случае элемент x будем называть *подвижным элементом* ретракции e. Элементы ex, $x\in A$, суть в точности неподвижные элементы ретракции e.

Цепь – это линейно упорядоченное множество. Ясно, что любая цепь является решеткой.

Обозначим через C_n n-элементную цепь и рассмотрим прямое произведение $C_n\times C_m=\{(a, b) \mid a\in C_n, b\in C_m\}$. Ясно, что $C_n\times C_m$ будет решеткой из nm элементов.

Целью данной работы является вывод формулы для подсчета всех ретракций решетки $C_n\times C_2$.

Задача нахождения числа ретракций конечных решеток возникла в рамках теории полумодулей над полукольцами. Приведем некоторые исходные понятия этой теории [7, chapter 14].

Полукольцом называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot\rangle$ с коммутативно-ассоциативной операцией сложения + и ассоциативной операцией умножения $\cdot$, дистрибутивной относительно сложения с обеих сторон. Общая теория полуколец изложена в известной книге Голана [7]. Полукольцам с идемпотентным умножением посвящена наша работа [2].

Полумодулем над полукольцом S, или просто *S-полумодулем,* называется коммутативная полугруппа $\langle A, +\rangle$ вместе с отображением $S\times A \to A$, $(s, a)\to sa$, обладающим следующими свойствами (для любых $s, t\in S$ и $a, b\in A$):

(1) $(s+t)a=sa+ta$;
(2) $s(a+b)=sa+sb$;
(3) $(st)a=s(ta)$.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект № 24-21-00117.

Замечание 1.1. Мы не предполагаем наличия нуля 0 и единицы 1 в полукольце S и существования нуля 0 в коммутативной полугруппе A, но даже если таковые в S и A имеются, то для S-полумодулей A не предполагается выполнение следующих условий: $1a=a$, $0a=0$, $s0=0$ ($\forall s\in S$, $\forall a\in A$).

Отображение f: $A\to B$ S-полумодуля A в S-полумодуль B называется *S-гомоморфизмом*, если $f(x+y)=f(x)+f(y)$ и $f(sx)=sf(x)$ для любых x, $y\in A$ и $s\in S$. Если S-гомоморфизм S-полумодулей является взаимно однозначным отображением, то он называется *S-изоморфизмом*. S-изоморфные полумодули обладают одними и теми же абстрактными свойствами.

Пусть e – центральный мультипликативный идемпотент полукольца S, т. е. $ee=e$ и $\forall s\in S$ $es=se$. На любом S-полумодуле A элемент e действует как идемпотентный S-гомоморфизм e: $A\to A$ по правилу: $e(x)=ex$ для всех $x\in A$. Такой S-гомоморфизм e назовем *ретракцией* S-полумодуля A; его образ $e(A)$ будет подполумодулем S-полумодуля A, состоящим в точности из неподвижных элементов отображения e. В ряде случаев подполумодуль $e(A)$ однозначно определяет сам S-полумодуль A. В частности, это происходит тогда, когда $S=\{e\}$ – одноэлементное полукольцо, $\langle A, \leq\rangle$ – конечная полурешетка ($x+y=\sup\{x, y\}$), $\forall x\in A$ $ex\leq x$ или $\forall x\in A$ $x\leq ex$. В работе [3] найдено число таких попарно неизоморфных полумодулей A с числом элементов, не превосходящим 5. В случае конечной цепи A ее подцепь B совпадает с образом $e(A)$, вообще говоря, различных ретракций e.

Отношение эквивалентности ρ на решетке A называется *конгруэнцией* на A, если $a\rho b$и $c\rho d$ влекут $(a+c)\rho(b+d)$ и $(ac)\rho(bd)$ для любых a, b, c, $d\in A$ (достаточно считать $c=d$).

Отметим, что каждая ретракция e решетки A порождает конгруэнцию $\rho(e)$ на решетке A по правилу

$$x\rho(e)y \text{ означает } ex=ey \text{ при любых } x, y\in A.$$

2. Число ретракций конечной цепи. Напомним, что *числами Фибоначчи* называются числа:

$$F_0=0,\ F_1=1,\ F_2=1,\ F_3=2,\ F_4=3,\ F_5=5,\ F_6=8,\ \ldots,$$

образованные по правилу $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ для всех натуральных чисел $n\geq 2$. Информацию о числах Фибоначчи можно найти, например, в параграфе 6.6 книги [5].

Теорема А [8, p. 228]. *Число всех ретракций n-элементной цепи равно числу Фибоначчи F_{2n} с номером $2n$.*

Теорема А опубликована J. M. Howie в 1971 году. В статье [9, Corollary 4.6] представлено другое доказательство этого результата.

Авторам известны два доказательства данной теоремы, отличные от указанных выше. Первое из них опубликовано в работе [1, задача 3.3.1, с. 34–35].

Приведем второе доказательство.

Докажем сначала ряд вспомогательных результатов.

Отождествим n-элементную цепь с отрезком первых n натуральных чисел с естественным порядком:

$$1< 2< 3< \ldots < n-1< n. \tag{1}$$

Для натуральных чисел $m\leq n$ положим:

$R(n)$ – число всех ретракций n-элементной цепи;

$R(n, m)$ – число ретракций n-элементной цепи с m неподвижными элементами;

$L(n)$ – число всех ретракций n-элементной цепи с неподвижными элементами 1 и $n\geq 2$;

$L(n, m)$ – число ретракций n-элементной цепи с $m\geq 2$ неподвижными элементами, среди которых 1 и n.

Имеем:

$$R(n)=\sum_{m=1}^{n} R(n,\ m) \text{ и } L(n)=\sum_{m=2}^{n} L(n,\ m). \tag{2}$$

Легко видеть, что $L(n, 2)=n-1$ для любого натурального числа $n\geq 2$. Поэтому число ретракций цепи (1) с m неподвижными числами $i_1< i_2< i_3< \ldots < i_m$ равно

$$(i_2-i_1)(i_3-i_2)\cdot\ldots\cdot(i_m-i_{m-1}). \tag{3}$$

Такие ретракции будем называть *ретракциями типа* $i_1< i_2< i_3< \ldots < i_m$, а число i_m-i_1+1 – их *длиной*.

Поэтому число $R(n)$ равно сумме произведений (3) по всевозможным выборкам $i_1< i_2< i_3< \ldots < i_m$ из первых n натуральных чисел.

Далее докажем ряд формул для чисел $L(n, m)$ и $R(n, m)$.

Следующие равенства очевидны (для соответствующих натуральных n):

$$R(n, 1)=n,\ R(n, n)=1,\ L(n, n)=1,\ R(n, n-1)=2n-2,\ L(n, n-1)=2n-4. \tag{4}$$

Предложение 2.1. *Для любых натуральных чисел $n\geq m\geq 3$ имеем:*

$$L(n,m)=\sum_{k=2}^{n-m+2}(k-1)L(n-k+1,\ m-1). \tag{5}$$

Доказательство. Возьмем произвольную ретракцию типа $1=i_1< i_2 <i_3< \ldots < i_m=n$. Элемент i_2 может принимать любые значения k от 2 до $n-m+2$ включительно. Легко видеть, что число указанных ретракций при $i_2=k$ равно произведению $(k-1)L(n-k+1, m-1)$. Тем самым получаем формулу (5).

Предложение 2.2. *Для любых натуральных чисел $n\geq m\geq 2$ имеем:*

$$R(n,m)=\sum_{k=m}^{n}(n-k+1)L(k,m). \tag{6}$$

Доказательство. Длина k любой ретракции типа $i_1< i_2<i_3< \ldots < i_m$ n-элементной цепи принимает значения от m до n включительно. Число таких ретракций длины k равно $(n-k+1)L(k, m)$. Поэтому имеет место формула (6).

Предложение 2.3. *Для любого натурального числа $n\geq 3$ верно равенство*

$$L(n, 3)=n(n-1)(n-2)/6=C_n^3. \tag{7}$$

Доказательство. С учетом формулы (4) по формуле (5) получаем:

$$\begin{gathered}L(n, 3)=1\cdot(n-2)+2(n-3)+\ldots+(n-2)\cdot 1=\\ =(n-1-1)+2(n-2-1)+\ldots+(n-2)(n-(n-2)-1)=\\ =(n-1)(1+2+\ldots+n-2)-(1^2+2^2+\ldots+(n-2)^2)=\\ =3(n-1)(n-2)(n-1)/6-(n-2)(n-1)(2n-3/6=\\ =(n-2)(n-1)(3n-3-2n+3)/6=(n-2)(n-1)n/6=C_n^3.\end{gathered}$$

Предложение 2.4. *Для любых натуральных чисел $n\geq m$ верно равенство*

$$R(n, m)=L(n+1, m+1), \tag{8}$$

в частности, $R(n, 2)=L(n+1, 3)=C_{n+1}^3$.

Действительно, записав слагаемые правой части формулы (5) для $L(n+1, m+1)$ в обратном порядке, получим правую часть формулы (6), т. е. значение $R(n, m)$.

Предложение 2.5. *Для любого натурального числа $n\geq 2$* имеем:

$$L(n)=R(n-1). \tag{9}$$

В самом деле, в силу формул (2) и (8) получаем:

$$L(n)=L(n, 2)+L(n, 3)+\ldots+L(n, n)=R(n-1, 1)+R(n-1,2)+\ldots+R(n-1, n-1)=R(n-1).$$

Предложение 2.6. *Для любых натуральных чисел $n\geq m\geq 2$ верно равенство*

$$R(n,m)=\sum_{k=m}^{n}(n-k+1)R(k-1,m-1). \tag{10}$$

Доказательство вытекает из формул (6) и (8).

Предложение 2.7. *Для любого натурального числа $n\geq 3$ верно равенство*

$$R(n, n-2)=2n^2-7n+6. \tag{11}$$

Доказательство. По формуле (8) $R(n, n-2)=L(n+1, n-1)$. Поэтому рассмотрим ретракции длины $n+1$ с двумя подвижными элементами, не равными 1 и $n+1$. Число распределений двух элементов на $n-1$ местах равно числу $(n-1)(n-2)/2$ сочетаний из $n-1$ по 2. Если подвижные элементы расположены рядом, то получаем $3(n-2)$ ретракций. В противном случае имеем $4((n-1)(n-2)/2-(n-2))$ ретракций. В результате получаем:

$$R(n, n-2)=2(n^2-3n+2-2n+4)+3n-6=2n^2-7n+6.$$

Используя формулы (4), (5), (7), (8) и (11), вычислим значения $L(n, m)$ при $n\leq 9$ и $2\leq m\leq n$. Имеем:

$L(2, 2)=1$,
$L(3, 2)=2$, $L(3, 3)=1$,
$L(4, 2)=3$, $L(4, 3)=4$, $L(4, 4)=1$,
$L(5, 2)=4$, $L(5, 3)=10$, $L(5, 4)=6$, $L(5, 5)=1$,
$L(6, 2)=5$, $L(6, 3)=20$, $L(6, 4)=21$, $L(6, 5)=8$, $L(6, 6)=1$,
$L(7, 2)=6$, $L(7, 3)=35$, $L(7, 4)=56$, $L(7, 5)=36$, $L(7, 6)=10$, $L(7, 7)=1$,
$L(8, 2)=7$, $L(8, 3)=56$, $L(7, 4)=126$, $L(8, 5)=36$, $L(8, 6)=55$, $L(8, 7)=12$, $L(8, 8)=1$,
$L(9, 2)=8$, $L(9, 3)=84$, $L(9, 4)=252$, $L(9, 5)=330$, $L(9, 6)=220$, $L(9, 7)=78$,
$L(9, 8)=14$ и $L(9, 9)=1$.

Имея найденные значения функции $L(n, m)$, по формуле (8) получаем:

$R(1, 1)=1$,

$R(2, 1)=2$, $R(2, 2)=1$,

$R(3, 1)=3$, $R(3, 2)=4$, $R(3, 3)=1$,

$R(4, 1)=4$, $R(4, 2)=10$, $R(4, 3)=6$, $R(4, 4)=1$,

$R(5, 1)=5$, $R(5, 2)=20$, $R(5, 3)=21$, $R(5, 4)=8$, $R(5, 5)=1$,

$R(6, 1)=6$, $R(6, 2)=35$, $R(6, 3)=56$, $R(6, 4)=36$, $R(6, 5)=10$, $R(6, 6)=1$,

$R(7, 1)=7$, $R(7, 2)=56$, $R(7, 3)=126$, $R(7, 4)=120$, $R(7, 5)=55$, $R(7, 6)=12$, $R(7,7)=1$,

$R(8, 1)=8$, $R(8, 2)=84$, $R(8, 3)=252$, $R(8, 4)=330$, $R(8, 5)=220$, $R(8, 6)=78$, $R(8, 7)=14$ и $R(8, 8)=1$.

Суммируя по m значения $R(n, m)$ в предыдущих строках, получаем по формуле (2):

$$R(1)=1,\ R(2)=3,\ R(3)=8,\ R(4)=21,\ R(5)=55,$$
$$R(6)=144,\ R(7)=377,\ R(8)=987.$$

Мы видим, что напрашивается следующее рекуррентное соотношение: $R(n)=3R(n-1)-R(n-2)$ при всех натуральных $n\geq 3$.

Предложение 2.8. *Для любого натурального числа* $n\geq 3$ *имеем:*

$$R(n+1)=R(n)+2R(n-1)+3R(n-2)+\ldots+(n-2)R(3)+(n-1)R(2)+nR(1)+n+1. \tag{12}$$

Доказательство. Распишем $R(n+1)$ на основании формул (2) и (10):

$$R(n+1, 1)=n+1$$
$$R(n+1, 2)=nR(1, 1)+(n-1)R(2, 1)+(n-2)R(3, 1)+\ldots+3R(n-2, 1)+2R(n-1, 1)+R(n, 1)$$
$$R(n+1, 3)=(n-1)R(2, 2)+(n-2)R(3, 2)+\ldots+3R(n-2, 2)+2R(n-1, 2)+R(n, 2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$R(n+1, n-1)=3R(n-2, n-2)+2R(n-1, n-2)+R(n, n-2)$$
$$R(n+1, n)=2R(n-1, n-1)+R(n, n-1)$$
$$R(n+1, n+1)=R(n, n).$$

Просуммируем последовательно выписанные равенства почленно, начиная со второго равенства и первых с конца слагаемых, а затем прибавим $n+1$. В результате получим равенство (12).

Предложение 2.9. *Для любого натурального числа* $n\geq 3$ *имеем:*

$$R(n)=R(n-1)+3R(n-2)+2R(n-2)+2R(n-3)+\ldots+2R(1)+2. \tag{13}$$

Доказательство. Для любой ретракции e n-элементной цепи (1) выполняется ровно одно из следующих условий:

1) $e(1)=1$ и $e(n)=n$;

2) $e(1)> 1$ и $e(n)< n$;

3) $e(1)=1$ и $e(n)< n$;

4) $e(1)> 1$ и $e(n)=n$.

Число ретракций e с условием 1) равно $R(n-1)$ по формуле (9).

Ясно, что число ретракций e с условием 2) равно $R(n-2)$.

Рассмотрим условие 3). Число $k=e(n)$ принимает значение от 1 до $n-1$. Число таких ретракций e, в силу формулы (9), равно $1+R(1)+R(2)+\ldots+R(n-2)$.

Условие 4) симметрично условию 3). Поэтому число ретракций e с условием 4) также равно $1+R(1)+R(2)+\ldots+R(n-2)$.

Суммируя указанные выражения, получаем искомое равенство (13).

Предложение 2.10. *Для любого натурального числа* $n\geq 3$ *верно равенство*

$$R(n)=3R(n-1)-R(n-2). \tag{14}$$

Доказательство проведем индукцией по n. Предположив справедливость равенства (14) для всех натуральных чисел k (вместо n), $3\leq k\leq n$, докажем его для $n+1$. Подставив в равенстве (12) $R(k)=3R(k-1)-R(k-2)$ для всех k от 3 до n, получаем:

$$R(n+1)=3R(n-1)-R(n-2)+2(3R(n-2)-R(n-3))+\ldots+(n-2)(3R(2)-R(1))+$$
$$(n-1)R(2)+nR(1)+n+1=$$
$$=3[R(n-1)+2R(n-2)+\ldots+(n-2)R(2)+(n-1)R(1)+n]-$$
$$[R(n-2)+2R(n-3)+\ldots+(n-2)R(1)+n-1]=3R(n)-R(n-1),$$

поскольку $(n-1)R(2)=3(n-1)R(1)$ и $nR(1)+n+1=2n+1=3n-(n-1)$.

Предложение доказано.

Лемма 2.1. $F_{n+2}=3F_n-F_{n-2}$ *для любого натурального числа* $n\geq 3$.

В самом деле,

$$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n=(F_n+F_{n-1})+F_n=(F_n+F_{n-1}+F_{n-2})+F_n-F_{n-2}=3F_n-F_{n-2}.$$

Теперь

Доказательство теоремы А вытекает из формулы (14), леммы 2.1 и равенств $R(1)=1=F_2$, $R(2)=3=F_4$.

Следствие 2.1. *Последовательность чисел* $R(1)$, $R(2)$, …, $R(n)$,… *представляет собой последовательность чисел Фибоначчи с четными натуральными номерами.*

Следствие 2.2. *На n-элементной цепи – с точностью до изоморфизма – существует ровно* F_{2n} *полумодулей над одноэлементным полукольцом.*

Следствие 2.3. *Для любого натурального числа* $n \geq 3$ имеем:

$$R(n)=2R(n-1)+R(n-2)+\ldots+R(1)+1. \tag{15}$$

Доказательство. Подставим в равенства (13) и (14) $n+1$ вместо n. Приравняем правые части полученных равенств. Выразив $R(n)$ через остальные слагаемые, получим равенство (15).

Следствие 2.4. *Для любого натурального числа* $n \geq 3$ имеем:

$$F_{2n}=2F_{2n-2}+F_{2n-4}+\ldots+F_2+1. \tag{16}$$

В силу теоремы А формула (15) превращается в формулу (16).

Аналогично, формулы (12) и (13) дают соответствующие равенства для чисел Фибоначчи с четными номерами.

Замечание 2.1. Равенства (12)–(15) представляют собой рекуррентные соотношения для функции $R(n)$, но только равенство (14) является «свернутой» формулой для $R(n)$ с начальными условиями $R(1)=1$ и $R(2)=3$.

3. Число ретракций прямого произведения двухэлементной и *n*-элементной цепей. Рассмотрим прямое произведение $A \times B$ решеток A и B. Пусть e_1 и e_2 – ретракции решеток A и B соответственно. Тогда отображение $e_1 \times e_2$: $A \times B \to A \times B$, определенное формулой

$$(e_1 \times e_2)((a, b))=(e_1 a, e_2 b) \text{ при } a \in A \text{ и } b \in B,$$

является ретракцией решетки $A \times B$.

Лемма 3.1 [4, с. 43, теорема 13]. *Произвольная конгруэнция* ρ *на решетке* $A \times B$ *имеет вид* $\rho=\rho_1 \times \rho_2$, *где* ρ_1 (ρ_2) *– конгруэнция на решетке A (B) и* $(a_1, b_1)(\rho_1 \times \rho_2)(a_2, b_2)$ *означает* $a_1 \rho_1 a_2$ *и* $b_1 \rho_2 b_2$ *для любых* $a_1, a_2 \in A$ *и* $b_1, b_2 \in B$.

Пусть ρ – произвольная конгруэнция на прямом произведении $A \times B$ решеток A и B. В контексте леммы 3.1 $\rho=\rho_1 \times \rho_2$. Предположим, что конгруэнция ρ_1 (ρ_2) индуцируется некоторой ретракцией e_1 (e_2) решетки A (B): $\rho_1=\rho(e_1)$ и $\rho_2=\rho(e_2)$. Ретракция $e_1 \times e_2$ порождает исходную конгруэнцию ρ, то есть $\rho=\rho(e_1 \times e_2)$. Заметим, что конгруэнция ρ может индуцироваться ретракцией решетки $A \times B$, отличной от ретракций вида $e_1 \times e_2$. Ретракции вида $e_1 \times e_2$ будем называть *каноническими ретракциями*, в противном случае – *неканоническими*.

Легко видеть, что имеет место

Лемма 3.2. *Если A и B – конечные решетки, имеющие соответственно k и l ретракций, то решетка* $A \times B$ *имеет ровно* $k \cdot l$ *канонических ретракций.*

Предложение 3.1. *Пусть A, B – произвольные решетки. Для того чтобы ретракция e решетки* $A \times B$ *была канонической, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее утверждение: если* $\rho(e)=\rho_1 \times \rho_2$, $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$, $e((a_1, b_1))=(a_1, b_1)$ *и* $e((a_2, b_2))=(a_2, b_2)$, *то* $a_1 \rho_1 a_2 \Rightarrow a_1=a_2$ *и* $b_1 \rho_2 b_2 \Rightarrow b_1=b_2$.

Доказательство. *Необходимость.* Допустим, что $e=e_1 \times e_2$ для ретракции e_1 на решетке A и ретракции e_2 на решетке B и выполняется условие из указанного в формулировке утверждения. Тогда $\rho_1=\rho(e_1)$, $a_1=e_1(a_1)$, $a_2=e_1(a_2)$, стало быть, $a_1 \rho_1 a_2 \Leftrightarrow e_1(a_1)=e_1(a_2)$. Аналогично, $b_1 \rho_2 b_2 \Rightarrow b_1=b_2$.

Достаточность. Пусть верно утверждение из формулировки данного предложения. Для любых $a \in A$ и $b \in B$ положим $e_1(a)=p_1(e((a, b)))$ и $e_2(b)=p_2(e((a, b)))$, где $p_1((x, y))=x$ и $p_2((x, y))=y$ для всех $x \in A$ и $y \in B$. Покажем, что значение $e_1(a)$ не зависит от второй координаты b пары (a, b). Возьмем пару (a, c), где $c \in B$. Поскольку $e((a, b))\rho(a, b)$ и $e((a, c))\rho(a, c)$, то $p_1(e((a, b)))\rho_1 a \rho_1 p_1(e((a, c)))$. Поэтому $p_1(e((a, b)))=p_1(e((a, c)))$. Аналогично доказывается, что значение $e_2(b)$ не зависит от первой координаты пары (a, b). Легко видеть, что отображения e_1 и e_2 служат ретракциями решеток A и B соответственно. Равенство $e=e_1 \times e_2$ очевидно.

Пример 3.1. Найдем все ретракции решетки $C_2 \times C_2=\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$, где $C_2=\{0, 1\}$ при $0<1$. Цепь C_2 имеет три ретракции: константные $A \to \{0\}$, $A \to \{1\}$ и тождественную, и две конгруэнции: отношение равенства и одноклассовую. Поэтому решетка $C_2 \times C_2$ обладает девятью каноническими ретракциями и четырьмя конгруэнциями. Одноклассовая конгруэнция на решетке $C_2 \times C_2$ порождается четырьмя ретракциями, отношение равенства – только тождественной ретракцией, каждая из двух двухклассовых конгруэнций – 2 каноническими ретракциями. Возьмем на решетке $C_2 \times C_2$ конгруэнцию ρ с двумя классами $\{0, 1\} \times \{0\}$ и $\{0, 1\} \times \{1\}$. И рассмотрим отображение e: $C_2 \times C_2 \to C_2 \times C_2$, переводящее класс $C_2 \times \{0\}$ в элемент $(0, 0)$, а класс $C_2 \times \{1\}$ – в элемент $(1, 1)$. По предложению 3.1 e будет неканонической ретракцией решетки $C_2 \times C_2$, порождающей конгруэнцию ρ. Аналогично, двойственная к e неканическая ретракция порождает конгруэнцию с двумя классами $\{0\}\times C_2$ и $\{1\}\times C_2$. Таким образом, решетка $C_2\times C_2$ имеет 11 ретракций, включая две неканонические ретракции.

Обозначим $\mathrm{Ret}(n, m)$ – число всех ретракций прямого произведения n-элементной цепи C_n и m-элементной цепи C_m и найдем рекуррентную формулу для $\mathrm{Ret}(n, 2)$ числа всех ретракций решетки $C=C_n\times C_2$.

По лемме 3.2 число всех канонических ретракций на C равно $F_{2n}\cdot F_4=3F_{2n}$.

Число неканонических ретракций на C в случае, если конгруэнция цепи C_n одноклассовая, равно

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1=n(n-1)/2.$$

Далее обозначим $f(n)$ – число неканонических ретракций на C в случае, если конгруэнция цепи C_n неодноклассовая.

Лемма 3.3. *Для любого натурального числа $n\geq 2$ справедлива формула*

$$f(n)=1\cdot[f(n-1)+F_{2(n-1)}]+2\cdot[f(n-2)+F_{2(n-2)}]+\ldots+(n-1)\cdot[f(1)+F_2]. \quad (17)$$

Доказательство. Обозначим цепь C_n как $1< 2< 3< \ldots < k < \ldots < n-1< n$, а цепь C_2, соответственно, $a<b$. Найдем все конгруэнции на C, порождающие неканонические ретракции, в случае, когда конгруэнция цепи C_n неодноклассовая. Ясно, что при этом конгруэнция на C_2 должна быть одноклассовой. Рассмотрим конгруэнции на C_n, одним из классов которых является отрезок $1< 2< 3< \ldots < k$, где $k<n$. Любому элементу из данного отрезка будет соответствовать элемент a цепи C_2. Поэтому всего получим k таких конгруэнций. В каждой из них остальным $n-k$ элементам цепи C_n будут соответствовать конгруэнции, порождающие неканонические ретракции решетки $C_{n-k}\times C_2$ и канонические ретракции $n-k$ элементной цепи, всего $f(n-k)+F_{2(n-k)}$ ретракций. Теперь, суммируя по всем k от 1 до $n-1$, получаем требуемую формулу.

Лемма 3.4. *Для любого натурального числа $n\geq 2$ справедлива формула*

$$f(n)=3f(n-1)-f(n-2)+F_{2(n-1)}. \quad (18)$$

Доказательство. В силу леммы 3.3

$$\begin{gathered}f(n)-f(n-1)=\\ =(1\cdot[f(n-1)+F_{2(n-1)}]+2\cdot[f(n-2)+F_{2(n-2)}]+\ldots+(n-1)\cdot[f(1)+F_2])-\\ -(1\cdot[f(n-2)+F_{2(n-2)}]+2\cdot[f(n-3)+F_{2(n-3)}]+\ldots+(n-2)\cdot[f(1)+F_2])=\\ =[f(n-1)+F_{2(n-1)}]+([f(n-2)+F_{2(n-2)}]+\ldots+[f(1)+F_2])=\\ =[f(n-1)+F_{2(n-1)}]+(f(n-1)-f(n-2))=2f(n-1)-f(n-2)+F_{2(n-1)},\end{gathered}$$

откуда

$$f(n)=3f(n-1)-f(n-2)+F_{2(n-1)}.$$

Пример 3.2. Вычислим несколько первых значений $f(n)$ и $\mathrm{Ret}(n, 2)$. Имеем $f(1)=0$, $f(2)=1$. Тогда

$$\begin{gathered}f(3)=3f(2)-f(1)+F_4=3\cdot 1-0+3=6;\\ f(4)=3f(3)-f(2)+F_6=3\cdot 6-1+8=25;\\ f(5)=3f(4)-f(3)+F_8=3\cdot 25-6+21=90;\\ f(6)=3f(5)-f(4)+F_{10}=3\cdot 90-25+55=300;\\ f(7)=3f(6)-f(5)+F_{12}=3\cdot 300-90+144=954,\end{gathered}$$

поэтому

$$\begin{gathered}\mathrm{Ret}(2, 2)=f(2)+3F_4+2\cdot 1/2=1+3\cdot 3+1=11;\\ \mathrm{Ret}(3, 2)=f(3)+3F_6+3\cdot 2/2=6+3\cdot 8+3=33;\\ \mathrm{Ret}(4, 2)=f(4)+3F_8+4\cdot 3/2=25+3\cdot 21+6=94;\\ \mathrm{Ret}(5, 2)=f(5)+3F_{10}+5\cdot 4/2=90+3\cdot 55+10=265;\\ \mathrm{Ret}(6, 2)=f(6)+3F_{12}+6\cdot 5/2=300+3\cdot 144+15=747;\\ \mathrm{Ret}(7, 2)=f(7)+3F_{14}+7\cdot 6/2=954+3\cdot 377+21=2106.\end{gathered}$$

Замечание 3.1. По формуле (18)

$$f(n)=3f(n-1)-f(n-2)+F_{2(n-1)},$$

причем $f(1)=0$, $f(2)=1=F_2$.

Тогда

$$\begin{gathered}f(3)=3f(2)-f(1)+F_4=3F_2-0+F_4=3F_2+1F_4=F_4F_2+F_2F_4;\\ f(4)=3f(3)-f(2)+F_6=3(3F_2+1F_4)-F_2+F_6=8F_2+3F_4+1F_6=F_6F_2+F_4F_4+F_2F_6;\\ f(5)=3f(4)-f(3)+F_8=3(8F_2+3F_4+1F_6)-(3F_2+1F_4)+F_8=21F_2+8F_4+3F_6+1F_8=\\ =F_8F_2+F_6F_4+F_4F_6+F_2F_8;\\ f(6)=3f(5)-f(4)+F_{10}=3(21F_2+8F_4+3F_6+1F_8)-(8F_2+3F_4+1F_6)+F_{10}=\\ =55F_2+21F_4+8F_6+3F_8+1F_{10}=F_{10}F_2+F_8F_4+F_6F_6+F_4F_8+F_2F_{10}.\end{gathered}$$

Предложение 3.2. *Для любого натурального числа $n\geq 2$ справедлива формула*

$$f(n)=\sum_{i+j=n}(F_{2i}\cdot F_{2j}). \quad (19)$$

Доказательство проведем индукцией по n. База индукции проверена в замечании 3.1.

Пусть для натуральных чисел, меньших n, формула верна. Тогда

$$f(n)=3f(n-1)-f(n-2)+F_{2(n-1)}=$$
$$=3(F_{2(n-2)}F_2+F_{2(n-3)}F_4+\ldots+F_4F_{2(n-3)}+F_2F_{2(n-2)})-$$
$$-(F_{2(n-3)}F_2+F_{2(n-4)}F_4+\ldots+F_4F_{2(n-4)}+F_2F_{2(n-3)})+F_{2(n-1)}=$$
$$=(3F_{2(n-2)}-F_{2(n-3)})F_2+(3F_{2(n-3)}-F_{2(n-4)})F_4+\ldots+(3F_4-F_2)F_{2(n-3)}+3F_2F_{2(n-2)}+1F_{2(n-1)}=$$
$$=F_{2(n-1)}F_2+F_{2(n-2)}F_4+\ldots+F_6F_{2(n-3)}+F_4F_{2(n-2)}+F_2F_{2(n-1)}.$$

Предложение доказано.

Таким образом, суммируя вышесказанное, получаем следующий результат.

Теорема 3.1. *Для натурального числа n имеет место формула*

$$\mathrm{Ret}(n,2)=f(n)+3F_{2n}+n(n-1)/2=\sum_{i+j=n}(F_{2i}\cdot F_{2j})+3F_{2n}+n(n-1)/2. \tag{20}$$

Пример 3.3. Вычислим с помощью формулы (20) несколько первых значений $\mathrm{Ret}(n, 2)$:

$$\mathrm{Ret}(2,2)=\sum_{i+j=2}(F_{2i}\cdot F_{2j})+3F_4+2\cdot(2-1)/2=F_2\cdot F_2+3F_4+1=1\cdot1+3\cdot3+1=11;$$

$$\mathrm{Ret}(3,2)=\sum_{i+j=3}(F_{2i}\cdot F_{2j})+3F_6+3\cdot(3-1)/2=F_2\cdot F_4+F_4\cdot F_2+3F_6+3=2\cdot1\cdot3+3\cdot8+3=33;$$

$$\mathrm{Ret}(4,2)=\sum_{i+j=4}(F_{2i}\cdot F_{2j})+3F_8+4\cdot(4-1)/2=F_2\cdot F_6+F_4\cdot F_4+F_6\cdot F_2+3F_8+6=2\cdot1\cdot8+3\cdot3+3\cdot21+6=94;$$

$$\mathrm{Ret}(5,2)=\sum_{i+j=5}(F_{2i}\cdot F_{2j})+3F_{10}+5\cdot(5-1)/2=F_2\cdot F_8+F_4\cdot F_6+F_6\cdot F_4+F_8\cdot F_2+3F_{10}+10=$$
$$=2\cdot1\cdot21+2\cdot3\cdot8+3\cdot55+10=265.$$

Замечание 3.2. В статье [6] получена формула для числа всех ретрактов прямого произведения $C_m\times C_n$ при любых натуральных числах m и n. В частности, число ретрактов решетки $C_2\times C_2$ равно 10, в то время как число ее ретракций равно 11. Отметим, что ретракт решетки может быть образом ее различных ретракций.

Список литературы

1. *Вечтомов Е. М., Мамаев А. А.* Комбинаторные задачи о функциях и бинарных отношениях // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2025. Вып. 2 (55). С. 20–37.
2. *Вечтомов Е. М., Петров А. А.* Функциональная алгебра и полукольца. Полукольца с идемпотентным умножением. СПб. : Лань, 2022. 180 с.
3. *Вечтомов Е. М., Петров А. А., Шкляев А. П.* Конечные полумодули над трехэлементными мультипликативно идемпотентными полукольцами // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. № 3 (66). С. 5–15.
4. *Гретцер Г.* Общая теория решеток. М. : Мир, 1981. 456 с.
5. *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. Основание информатики. М. : Мир, 1998. 703 с.
6. *Czédli G.* Lattices of retracts of direct products of two finite chains and notes on retracts of lattices // Algebra Universalis. 2022. Vol. 83. Is. 3. № 34.
7. *Golan J. S.* Semirings and their applications. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1999. 382 p.
8. *Howie J. M.* Products of idempotents in certain semigroups of transformations // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. 1971. Vol. 17. Is. 3. Pp. 223–236.
9. *Laradji A., Umar A.* Combinatorial results for semigroups of order-preserving full transformations // Semigroup Forum. 2006. Vol. 72. Is. 1. Pp. 51–62.

About the number of retractions of directs product two finite chains

Vechtomov Evgenii Mikhailovich[1], Petrov Andrei Aleksandrovich[2]

[1]Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, researcher at the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: vecht@mail.ru

[2]PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Fundamental Mathematics Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: apetrov43@mail.ru

Abstract. In this paper, we study the retractions of the direct product of two finite chains. By a retraction of a lattice A, we mean an idempotent homomorphism of A into itself. We have found and proved the formula for counting of all the retractions of the direct product of a two-element chain with an n-element chain.

Keywords: retraction, n-element chain, Fibonacci numbers, direct product of chains.

References

1. *Vechtomov E. M., Mamaev A. A. Kombinatornye zadachi o funkcijah i binarnyh otnoshenijah* [Combinatorial problems about functions and binary relations] *// Syktyvkar University Bulletin. Series 1: Mathematics. Mechanics. Computer Science* – Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2025. Is. 2 (55). Pp. 20–37.

2. *Vechtomov E. M., Petrov A. A. Funkcional'naja algebra i polukol'ca. Polukol'ca s idempotentnym umnozheniem* [Functional algebra and semirings. Semirings with idempotent multiplication]. SPb., Lan', 2022. 180 p.

3. *Vechtomov E. M., Petrov A. A., Shkljaev A. P. Konechnye polumoduli nad trehjelementnymi mul'tiplikativno idempotentnymi polukol'cami* [Finite semimodules over three-element multiplicatively idempotent semirings] // *Perm University Bulletin. Mathematics. Mechanics. Computer Science* – Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2024. No. 3 (66). Pp. 5–15.

4. *Grätzer G. Obshhaja teorija reshetok* [General Lattice Theory]. M., Mir, 1981. 456 p.

5. *Graham R., Knuth D., Patashnik O. Konkretnaja matematika. Osnovanie informatiki* [Concrete Mathematics. A Foundation of Computer Science]. M., Mir, 1998. 703 p.

6. *Czédli G.* Lattices of retracts of direct products of two finite chains and notes on retracts of lattices // Algebra Universalis. 2022. Vol. 83. Is. 3. No. 34.

7. *Golan J. S.* Semirings and their applications. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1999. 382 p.

8. *Howie J. M.* Products of idempotents in certain semigroups of transformations // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. 1971. Vol. 17. Is. 3. Pp. 223–236.

9. *Laradji A., Umar A.* Combinatorial results for semigroups of order-preserving full transformations // Semigroup Forum. 2006. Vol. 72. Is. 1. Pp. 51–62.

Поступила в редакцию: 07.10.2025
Принята к публикации: 30.10.2025