

---

# МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

---

УДК 372.851

EDN: OUXRCL

## Динамические чертежи в геометрических задачах на построение

Елфимова Александра Александровна<sup>1</sup>, Тимшина Лариса Вячеславовна<sup>2</sup>

<sup>1</sup>магистрант кафедры прикладной математики и информатики, Вятский государственный университет.

Россия, г. Киров. E-mail: alexandra.danil2017@yandex.ru

<sup>2</sup>старший преподаватель кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет.

Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0003-3279-8259. E-mail: larisatimshina@rambler.ru

**Аннотация.** Одно из наиболее перспективных направлений в технологиях обучения математике – внедрение и развитие интерактивных геометрических сред и, как следствие, выявление эффективных путей их использования в образовательном процессе. В статье предлагается набор интерактивных чертежей для работы с геометрическими задачами. В качестве задач выбраны задачи на построение для 8-го класса повышенного уровня сложности.

**Ключевые слова:** динамические чертежи, геометрические задачи на построение, GeoGebra.

В условиях цифровизации образования высокую оценку заслужили программные среды, позволяющие создавать динамические чертежи, т. е. компьютерные геометрические чертежи-модели, исходные данные которых можно варьировать с сохранением всего алгоритма построения, просматривать их и работать с ними [7].

Вопросы разработки и использования динамических чертежей находятся на стыке геометрии, компьютерных наук, дидактики и инженерного проектирования. Считается, что теоретические и практические основы динамической геометрии заложили Жан-Мари Лаборд (Jean-Marie Laborde) во Франции и Николас Джекив (Nicholas Jackiw) в США. Их программы – соответственно Cabri и The Geometer's Sketchpad (GSP) – обеспечили возможность интерактивного изучения геометрии через манипуляцию объектами. В настоящее время в школьном обучении наиболее часто для создания интерактивных моделей применяются такие специализированные программы и онлайн-сервисы, как GeoGebra, «Живая геометрия», «1С: Математический конструктор» [13–15].

Остановимся отдельно на GeoGebra. Это свободно распространяемая среда, которая дает возможность создания новых инструментов, органически сочетается с интерактивной доской и существенно расширяет диапазон ее применения. Подробно с возможностями GeoGebra и опытом применения ее в учебном процессе можно ознакомиться в публикациях [5, 6, 12].

К преимуществам применения интерактивных моделей в обучении современные исследователи относят:

– Скорость применения. Обучение с применением интерактивных моделей позволяет быстрее и эффективнее научить тем или иным практическим и теоретическим навыкам.

– Актуальность. Технологии, в том числе и образовательные, в современном мире развиваются и меняются очень быстро. Поэтому учащимся и учителям, использующим интерактивные модели, удастся достойно соответствовать реальным требованиям обучения и общества.

– Точность и контроль. Использование интерактивных моделей в процессе обучения дает возможность контролировать процесс обучения, наблюдать за действиями учащихся и корректировать их, следить за их успеваемостью и потенциалом.

– Вовлеченность в процесс обучения. Происходит усиление интерактивности, а следовательно, и увеличение уровня мотивации, эмоциональное вовлечение в процесс обучения благоприятно влияет на уровень усвоения и запоминания материала.

– Возможность каждому ученику стать непосредственным участником учебного процесса. Каждый ученик видит результат своего труда, может проанализировать допущенные ошибки, сделать выводы и обобщить полученные знания и умения [2, 9].

Также отмечаются и недостатки: риск поверхностного восприятия, подмена цели, цифровое неравенство.

В рамках проведенного исследования была разработана коллекция интерактивных чертежей-моделей для методического сопровождения решения геометрических задач на построение повышенной сложности главы «Многоугольники. Четырехугольники» учебника: Мерзляк А. Г. Геометрия. 8 класс: углубленный уровень [10].

Интерактивные чертежи-модели разрабатывались к задачам:

1. На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  постройте соответственно такие точки  $M$  и  $K$ , чтобы  $AM = BK$ ,  $MK \parallel AC$ .

2. Даны пересекающиеся прямые и точка, не лежащая на этих прямых. Постройте отрезок с концами на данных прямых и серединой в данной точке.

3 Точки  $M$ ,  $N$  и  $K$  соответственно середины равных сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  четырехугольника  $ABCD$ . Постройте по этим точкам четырехугольник  $ABCD$ .

4. Даны точки  $A$ ,  $C$  и  $M$ . Постройте ромб  $ABCD$ , если известно расстояние от точки  $M$  до точки  $N$  – середины стороны  $BC$ .

5. Продолжение медианы  $AM$  треугольника  $ABC$  пересекает его описанную окружность в точке  $D$ . Постройте треугольник  $ABC$  по заданным точкам  $A$ ,  $B$  и  $D$ .

Дадим небольшой комментарий к рассматриваемым задачам. С точки зрения методики работы с задачей на построение процесс ее решения разбивают на этапы: анализ, построение, доказательство и исследование.

Исследование является завершающим этапом решения задачи и имеет целью установить условия разрешимости и определить число решений, т. е. необходимо ответить на следующие вопросы:

1) При любых ли допустимых значениях исходных данных задача имеет решение?

2) Сколько различных решений может быть получено при заданных условиях [4]?

На этом этапе видно явное преимущество динамических чертежей. Они предоставляют возможность варьировать элементы геометрической конфигурации и мгновенно видеть результат.

В качестве платформы для создания интерактивных чертежей-моделей была выбрана GeoGebra. В контексте школьной геометрии особенно ценно, что она дает возможность: создавать точные динамические чертежи, отражающие ход построения; исследовать свойства геометрических объектов путем манипуляции и наблюдения; осуществлять доказательства с помощью построения; встраивать текстовые комментарии, вопросы, гипотезы и пояснения в рабочие области. Все перечисленное делает возможным создать наглядные и интерактивные чертежи.

Представленные чертежи-модели по характеру активности при взаимодействии с пользователем имеют различный уровень интерактивности:

– условно-пассивный уровень характеризуется отсутствием взаимодействия пользователя с контентом, при этом контент имеет неизменный вид в процессе использования;

– активный уровень характеризуется простым взаимодействием пользователя с контентом на уровне элементарных операций с его составляющими (элементами);

– деятельностный уровень характеризуется конструктивным взаимодействием пользователя с элементами контента;

– исследовательский уровень ориентируется не на изучение предложенных событий, а на производство собственных событий [11].

Подготовленная коллекция интерактивных чертежей-моделей размещается на сайте программы GeoGebra и представляет собой GeoGebra-книгу «Занимательные задачи на построение» [8]. Структурно книга состоит из отдельных интерактивных рабочих страниц. Интерактивная страница – это документ, который содержит материалы для работы с одной задачей на построение. В нем присутствуют шесть рабочих областей, каждая из которых соответствует определенному этапу решения задачи. Некоторые из этих областей являются интерактивными полями и содержат динамические чертежи.

Интерфейс книги понятен. Главное меню позволяет переходить к отдельным страницам книги. Управление в каждой рабочей области осуществляется с помощью стандартных инструментов GeoGebra. Все элементы снабжены поясняющими подписями. Присутствуют функции сброса конструкции, панорамирования и масштабирования; доступ к меню и панели инструментов, кнопка проигрывания шагов построения, что позволяет контролировать этапность выполнения задания.

Продемонстрируем в виде рисунков рабочие области одной интерактивной страницы. Они соответствуют шести этапам решения задачи на построение.

1-й этап. Формулировка задачи. В верхней части страницы размещается условие задачи (рис. 1).

**Задание**

Точки  $M$ ,  $N$  и  $K$  - соответственно середины равных сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  четырёхугольника  $ABCD$ . Постройте по этим точкам четырёхугольник  $ABCD$ .

Рис. 1. Рабочая область первого этапа

На этом этапе осуществляется чтение текста с последующим обсуждением, что соответствует условно-пассивной форме интерактивности.

2-й этап. Пробное построение. Пользователю предлагается самостоятельно (без подсказок) выполнить построение, используя набор инструментов GeoGebra (рис. 2).

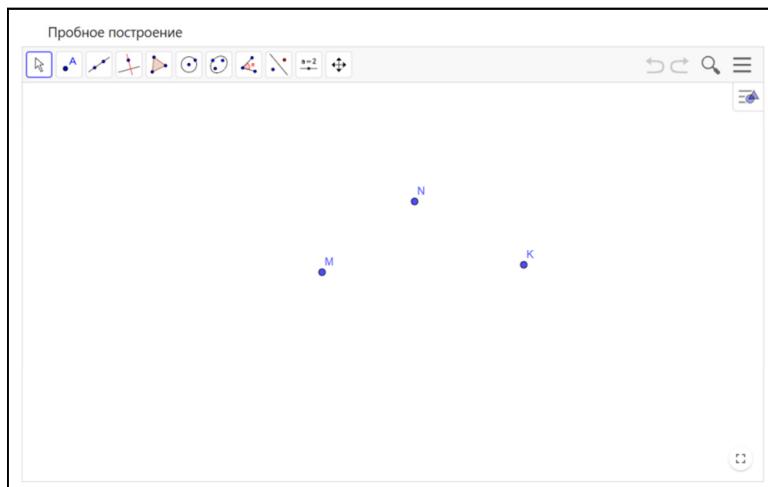


Рис. 2. Рабочая область второго этапа

На этом этапе осуществляется:

- введение/удаление объектов;
- перемещение объектов;
- масштабирование объектов для детального изучения;
- изменение параметров объектов.

Перечисленные взаимодействия пользователя с элементами чертежа соответствуют деятельностиной или исследовательской форме интерактивности.

3-й этап. Анализ задачи. Представлен краткий текст анализа, в котором пошагово разбирается условие задачи: какие элементы заданы, как они между собой связаны, какие геометрические свойства фигур можно применить (рис. 3). При этом каждый шаг анализа подтверждается наглядным построением.

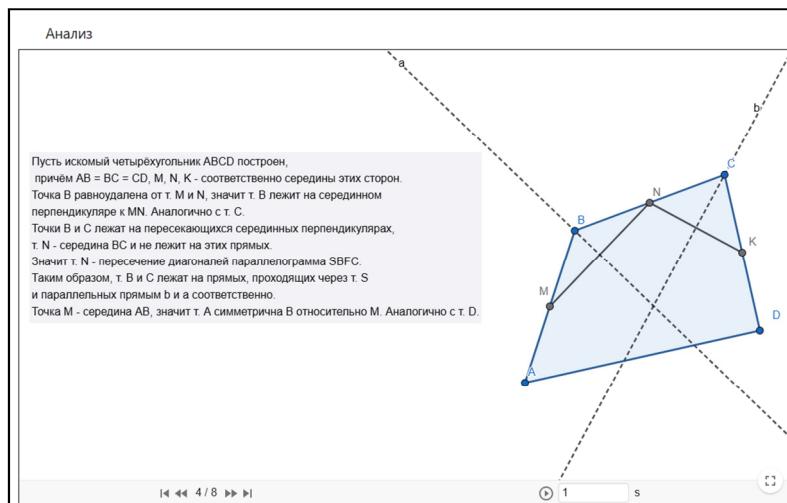


Рис. 3. Рабочая область третьего этапа

На этом этапе осуществляется:

– чтение текста, в том числе с управлением его движения в окне представления («листание» страниц, скроллинг);

- просмотр динамических изображений;
- частичное перемещение объектов;

– масштабирование объектов для детального изучения.

Перечисленные взаимодействия пользователя с элементами чертежа соответствуют условно-пассивной форме интерактивности.

4-й этап. Динамическое построение. Пошагово визуализируется каждый этап решения задачи с пояснениями (рис. 4).

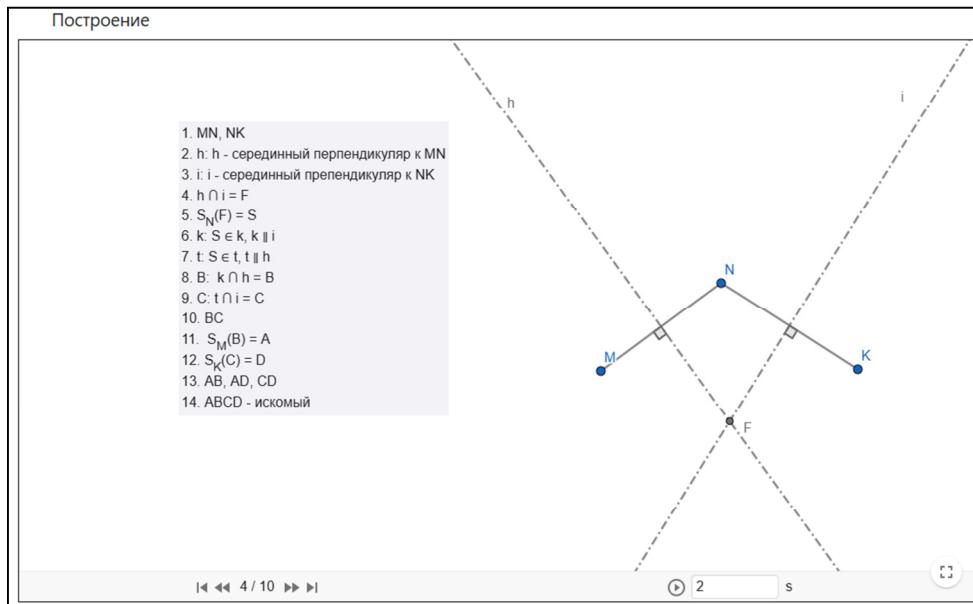


Рис. 4. Рабочая область четвертого этапа

На этом этапе осуществляется:

– чтение текста, в том числе с управлением его движения в окне представления («листание» страниц, скроллинг);

- просмотр динамических изображений;
- перемещение объектов;

– масштабирование объектов для детального изучения.

Перечисленные взаимодействия пользователя с элементами чертежа соответствуют условно-пассивной форме и частично активной форме интерактивности.

5-й этап. Доказательство. На этом этапе устанавливается, удовлетворяет ли представленное построение всем условиям задачи (рис. 5).

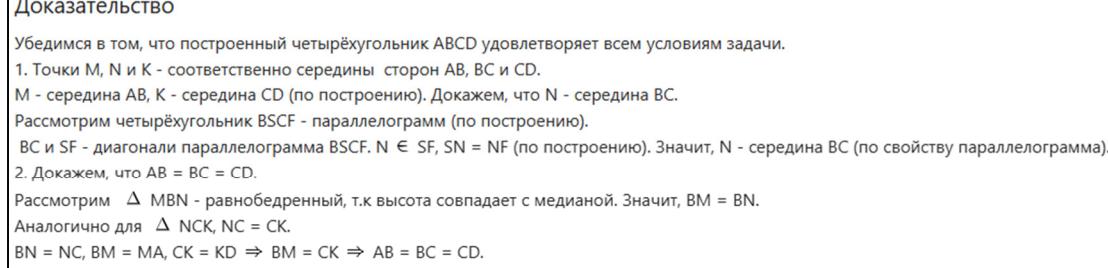


Рис. 5. Рабочая область пятого этапа

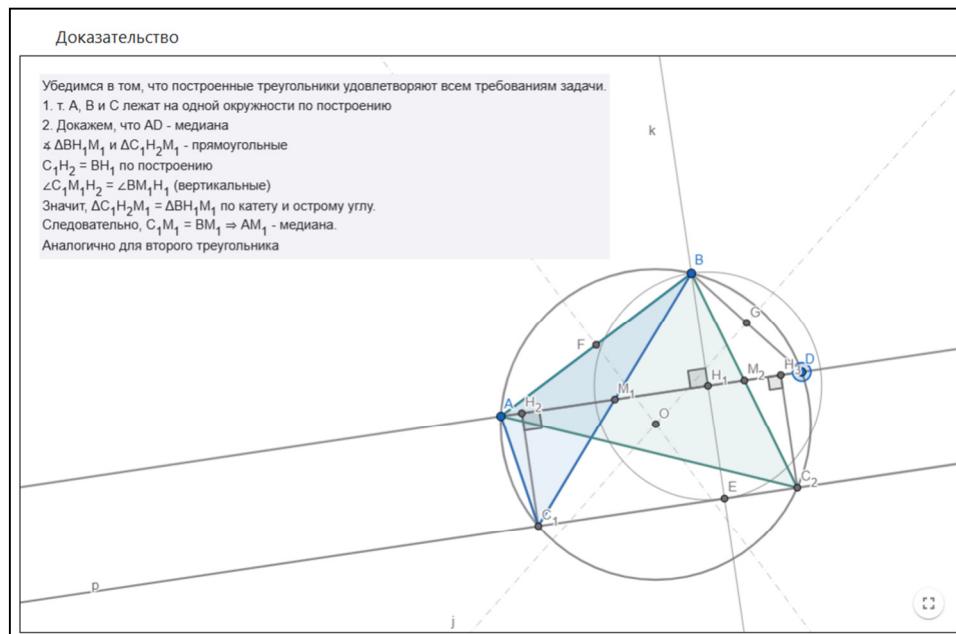


Рис. 5.1. Рабочая область пятого этапа

К основному способу взаимодействия на данном этапе можно отнести чтение текста. Однако в некоторых задачах можно отметить: просмотр динамических изображений; перемещение объектов; масштабирование объектов для детального изучения (рис. 5.1).

Перечисленные взаимодействия соответствуют условно-пассивной форме и активной форме интерактивности.

6-й этап. Исследование. На этом этапе пользователю предлагается выяснить, всегда ли можно выполнить построение, сколько решений имеет задача при всех возможных данных (рис. 6). Осуществить это можно за счет перемещения исходных данных на этапе построения.

## Исследование

Построения 1-3 выполняются и притом однозначно.

Построение 4 возможно лишь тогда, когда точки М, Н и К не лежат на одной прямой.

Построения 5-13 всегда выполнимы.

Значит, задача может иметь одно решение.

Рис. 6. Рабочая область шестого этапа

Сам этап исследования представлен в условно-пассивной форме интерактивности, однако его осуществление зависит от работы на этапе построения. Поэтому, в совокупности, данному этапу присуща активная форма интерактивности.

На наш взгляд, динамические чертежи трансформируют абстрактные геометрические факты в визуальные, интерактивные модели, что способствует более глубокому и осознанному усвоению материала. Смена уровней интерактивности на каждом этапе решения задач на построение способствует поддержанию вовлеченности пользователей (учащихся) в обсуждение проблем. Разработанные интерактивные модели могут эффективно использовать: учащиеся для самостоятельного изучения материала, студенты и учителя в образовательном процессе.

## Список литературы

1. Атанасян Л. С. Математика. Геометрия. 7–9 классы: геометрия. 7–9 классы: базовый уровень : учеб. / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. 15-е изд., перераб. М. : Просвещение, 2024. 416 с.
2. Баяндин Д. В. Классификация интерактивных компьютерных моделей и структура процесса познания в физике // Современные проблемы науки и образования. Педагогика. 2013. № 2. URL: <https://science-education.ru/gu/article/view?id=9018> (дата обращения: 25.09.2025).
3. Буданцев Д. В. Цифровизация в сфере образования: обзор российских научных публикаций // Молодой ученый. 2020. № 27(317). С. 120–127. URL: <https://moluch.ru/archive/317/72477/> (дата обращения: 25.09.2025).
4. Горшкова Л. С., Марина Е. В. Геометрические построения : учеб. пособие для студ. и преподавателей пед. вузов. Пенза : Изд-во ПГПУ имени В. Г. Белинского, 2008. 140 с.

5. Динамическая математическая образовательная среда GeoGebra : учеб. пособие / А. Р. Есаян, Н. М. Добровольский, Е. А. Седова, А. В. Якушин. Тула : Изд-во Тульского гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2017. Ч. I. 417 с.
6. Дронова Е. Н., Захарова Д. С. Использование программы GeoGebra для решения геометрических задач основного государственного экзамена по математике // Вестник Алтайского государственного педагогического университета. 2017. № 31. С. 25–29. URL: <https://journals-altspu.ru/vestnik/article/view/892> (дата обращения: 25.09.2025).
7. Дубровский В. Н., Лебедева Н. А., Белайчук О. А. 1С: математический конструктор – новая программа динамической геометрии // КИО. 2007. № 3. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/1s-matematicheskij-konstruktur-novaya-programma-dinamicheskoy-geometrii-1> (дата обращения: 25.09.2025).
8. Елфимова А. А. Занимательные задачи на построение. URL: <https://www.geogebra.org/m/q4z3cmgs> (дата обращения: 25.09.2025).
9. Зиатдинов Р. А., Ракута В. М. Системы динамической геометрии как средство компьютерного моделирования в системе современного математического образования // European Journal of Contemporary Education. 2012. Vol. 1. № 1. Pp. 93–100. URL: [https://ejce.cherkasgu.press/journals\\_n/1348513764.pdf](https://ejce.cherkasgu.press/journals_n/1348513764.pdf) (дата обращения: 25.09.2025).
10. Мерзляк А. Г., Поляков В. М. Геометрия. 8 класс: углубленный уровень : учеб. / под ред. В. Е. Подольского. 3-е изд., стер. М. : Просвещение : Вентана-Граф, 2021. 221 с.
11. Осин А. В. Электронные образовательные ресурсы нового поколения: открытые образовательные модульные мультимедиа системы // Интернет-порталы: содержание и технологии / редкол.: А. Н. Тихонов (пред.) и др. ; ФГУ ГНИИ ИТТ «Информика». М. : Просвещение, 2007. № 4. С. 12–29. URL: [http://pozdnyakova.ucoz.ru/Praktikum/osin\\_ehor.pdf](http://pozdnyakova.ucoz.ru/Praktikum/osin_ehor.pdf) (дата обращения: 25.09.2025).
12. Фунтиков Р. А. Обзор и сравнительный анализ динамических сред «Живая математика», «Математический конструктор» и «GeoGebra» // Молодой ученый. 2018. № 33 (219). С. 8–11. URL: <https://moluch.ru/archive/219/52350/> (дата обращения: 25.09.2025).
13. 1С: математический конструктор. URL: <https://obr.1c.ru/mathkit/index.html> (дата обращения: 25.09.2025).
14. GeoGebra. URL: <https://www.geogebra.org> (дата обращения: 25.09.2025).
15. The Geometer's Sketchpad (Живая геометрия). URL: <https://www.dynamicgeometry.com/> (дата обращения: 25.09.2025).

## Dynamic drawings in geometric construction problems

Elfimova Aleksandra Aleksandrovna<sup>1</sup>, Timshina Larisa Vyacheslavovna<sup>2</sup>

<sup>1</sup>master's student of the Department of Applied Mathematics and Computer science, Vyatka State University, Russia, Kirov. E-mail: alexandra.danil2017@yandex.ru

<sup>2</sup>senior lecturer of the Department of Fundamental mathematics, Vyatka State University, Russia, Kirov. ORCID: 0000-0003-3279-8259. E-mail: larisatimshina@rambler.ru

**Abstract.** The implementation and development of interactive geometric environments is one of the most promising areas in mathematics teaching technologies. Consequently, identifying effective ways to use them in the educational process is important. This article proposes a set of interactive drawings for working with geometric problems. The problems selected are advanced construction problems for 8th grade.

**Keywords:** Dynamic drawings, geometric construction problems, GeoGebra.

## References

1. Atanasiyan L. S. Mathematics. Geometry. Grades 7–9: Geometry. Grades 7–9: Basic Level : Textbook [Mathematics. Geometry. Grades 7–9: Geometry. Grades 7–9: Basic Level : Textbook] / L. S. Atanasiyan, V. F. Butuzov, S. B. Kadomtsev et al. 15th ed., revised. M., Prosveshchenie. 2024. 416 p.
2. Bayandin D. V. Klassifikaciya interaktivnyh kompyuternyh modelej i struktura processa poznaniya v fizike [Classification of interactive computer models and the structure of the cognitive process in physics] // Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya. Pedagogika – Modern problems of science and education, Pedagogy. 2013. No. 2. Available at: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=9018> (date accessed: 25.09.2025).
3. Budantsev D. V. Cifrovizaciya v sfere obrazovaniya: obzor rossijskih nauchnyh publikacij [Digitalization in education: a review of Russian scientific publications] // Molodoj uchenyj – Young scientist. 2020. No. 27 (317). Pp. 120–127. Available at: <https://moluch.ru/archive/317/72477/> (date accessed: 25.09.2025).
4. Gorshkova L. S., Marina E. V. Geometricheskie postroeniya : ucheb. posobie dlya stud. i prepodavatelej ped. vuzov [Geometric constructions : a textbook for students and teachers of pedagogical universities]. Penza, Publishing house of Perm State Pedagogical University n. a. V. G. Belinsky. 2008. 140 p.
5. Dinamicheskaya matematicheskaya obrazovatel'naya sreda GeoGebra : ucheb. posobie [GeoGebra dynamic mathematical educational environment : textbook] / A. R. Yesayan, N. M. Dobrovolsky, E. A. Sedova, A. V. Yakushin. Tula, Publishing house of Tula State Pedagogical University n. a. L. N. Tolstoy. 2017. Part I. 417 p.
6. Dronova E. N., Zakharova D. S. Ispol'zovanie programmy GeoGebra dlya resheniya geometricheskikh zadach osnovnogo gosudarstvennogo ekzamena po matematike [Using the GeoGebra program to solve geometric problems of the

main state exam in mathematics] // *Vestnik Altajskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta* – Bulletin of Altai State Pedagogical University. 2017. No. 31. Pp. 25–29. Available at: <https://journals-altspu.ru/vestnik/article/view/892> (date accessed: 25.09.2025).

7. Dubrovsky V. N., Lebedeva N. A., Belaychuk O. A. 1S: matematicheskij konstruktor – novaya programma dinamicheskoy geometrii [1C: Mathematical Constructor – a new program for dynamic geometry] // KIO. 2007. No. 3. Available at: <https://cyberleninka.ru/article/n/1s-matematicheskiy-konstruktor-novaya-programma-dinamicheskoy-geometrii-1> (date accessed: 25.09.2025).

8. El'fimova A. A. *Zanimatel'nye zadachi na postroenie* [Fun construction problems]. Available at: <https://www.geogebra.org/m/q4z3cmgs> (date accessed: 25.09.2025).

9. Ziatdinov R. A., Rakuta V. M. *Sistemy dinamicheskoy geometrii kak sredstvo kompyuternogo modelirovaniya v sisteme sovremennoj matematicheskogo obrazovaniya* [Dynamic geometry systems as a means of computer modeling in the system of modern mathematical education] // European Journal of Contemporary Education. 2012. Vol. 1. No. 1. Pp. 93–100. Available at: [https://ejce.cherkasgu.press/journals\\_n/1348513764.pdf](https://ejce.cherkasgu.press/journals_n/1348513764.pdf) (date accessed: 25.09.2025).

10. Merzlyak A. G., Polyakov V. M. *Geometriya. 8 klass: uglublennyj uroven'*: ucheb. [Geometry. Grade 8: advanced level : textbook] / ed. by V. E. Podolsky. 3rd ed., reprinted. M., Prosveshchenie ; Ventana-Graf. 2021. 221 p.

11. Osin A. V. *Elektronnnye obrazovatel'nye resursy novogo pokoleniya: otkrytye obrazovatel'nye modul'nye multimedija sistemy* [New generation electronic educational resources: open educational modular multimedia systems] // *Internet-portaly: soderzhanie i tekhnologii* – Internet Portals: Content and Technologies / ed. board: A. N. Tikhonov (chairman) et al.; Federal State Institution, Research Institute of Information Technologies and Technologies "Informika". M., Prosveshchenie. 2007. No. 4. Pp. 12–29. Available at: [http://pozdnyakova.ucoz.ru/Praktikum/osin\\_ehor.pdf](http://pozdnyakova.ucoz.ru/Praktikum/osin_ehor.pdf). (date accessed: 25.09.2025).

12. Funtikov R. A. *Obzor i srovnitel'nyj analiz dinamicheskikh sred "Zhivaya matematika", "Matematicheskij konstruktor" i "GeoGebra"* [Review and comparative analysis of the dynamic environments "Living Mathematics", "Mathematical Constructor" and "GeoGebra"] // *Molodoj uchenyj* – Young scientist. 2018. No. 33 (219). Pp. 8–11. Available at: <https://moluch.ru/archive/219/52350/> (date accessed: 25.09.2025).

13. 1C: Mathematical Constructor. Available at: <https://obr.1c.ru/mathkit/index.html> (date accessed: 25.09.2025).

14. GeoGebra. Available at: <https://www.geogebra.org> (date accessed: 25.09.2025).

15. The Geometer's Sketchpad (Living Mathematics). Available at: <https://www.dynamicgeometry.com/> (date accessed: 25.09.2025).

Поступила в редакцию: 29.09.2025

Принята к публикации: 30.10.2025