№2 (33) 2025

ISSN: 2782-2672

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК Вятского государственного университета

MATHEMATICAL BULLETIN of Vyatka State University

Вятский государственный университет

Математический вестник Вятского государственного университета

Н а у ч н ы й   ж у р н а л

№ 2 (33)

Киров
2025

УДК 51(051)
М34

Научный журнал «Математический вестник Вятского государственного университета»
как средство массовой информации зарегистрирован в Роскомнадзоре
(Свидетельство о регистрации СМИ Эл № ФС77-80462 от 01 марта 2021 г.)
Учредитель журнала – ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет»
Адрес издателя: 610000, г. Киров, ул. Московская, 36,
тел. (8332) 208-964 (Научное издательство ВятГУ)
Адрес редакции: 610000, г. Киров, ул. Московская, 36,
тел. (8332) 208-964 (Научное издательство ВятГУ)
Редактор **Ю. Н. Болдырева**
Компьютерная верстка **Л. А. Кислицына**
Редактор выпускающий **А. Ю. Егоров**
Ответственный за выпуск **И. В. Смольняк**

Цена свободная

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

УДК 512.56 EDN: GNOPCQ

О числе ретракций прямого произведения двух конечных цепей*

Вечтомов Евгений Михайлович[1], Петров Андрей Александрович[2]
[1]доктор физико-математических наук, профессор, научный сотрудник кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров.
ORCID: 0000-0002-3490-2956. E-mail: vecht@mail.ru
[2]кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-5877-2850.
E-mail: apetrov43@mail.ru

Аннотация. В работе исследуются ретракции прямого произведения двух конечных цепей. Под ретракцией решетки A понимается идемпотентный гомоморфизм A в себя. Найдена и доказана формула для подсчета числа всех ретракций прямого произведения двухэлементной цепи на n-элементную цепь.

Ключевые слова: ретракция, n-элементная цепь, числа Фибоначчи, прямое произведение цепей.

1. Введение. Исходные понятия. Основным результатом работы является формула (20) для числа всех ретракций прямого произведения двухэлементной цепи и n-элементной цепи. Также отметим новое доказательство теоремы А о числе всех ретракций произвольной конечной цепи, в котором применяются вспомогательные функции, представляющие самостоятельный интерес.

Полурешеткой называется идемпотентная коммутативная полугруппа. Если в полурешетке $\langle A, +\rangle$ задать бинарное отношение $\leq$ формулой: $a\leq b\Leftrightarrow a+b=b$ для любых $a, b\in A$, то получим упорядоченное множество $\langle A, \leq\rangle$, в котором $a+b=\sup\{a, b\}$ для всех $a, b\in A$, называемое *верхней полурешеткой*.

Решеткой называется алгебраическая структура $\langle A, +, \cdot\rangle$, для которой $\langle A, +\rangle$ и $\langle A, \cdot\rangle$ – полурешетки и операции сложения + и умножения $\cdot$ связаны законами поглощения $x+xy=x$ и $x(x+y)=x$. При этом соответствующая полурешетке $\langle A, +\rangle$ верхняя полурешетка $\langle A, \leq\rangle$ удовлетворяет равенству $a\cdot b=\inf\{a, b\}$ для любых $a, b\in A$. Решетка называется *решеткой с нулем*, если она обладает аддитивно нейтральным (равносильно, мультипликативно поглощающим, наименьшим) элементом 0.

Ретракцией решетки A назовем любой решеточный гомоморфизм e: $A\to A$, такой, что $e(e(x))=e(x)$ для всех $x\in X$. Вместо $e(x)$ будем писать просто ex. Элемент $x\in A$ называется *неподвижным элементом* ретракции e, если $ex=x$, в противном случае элемент x будем называть *подвижным элементом* ретракции e. Элементы ex, $x\in A$, суть в точности неподвижные элементы ретракции e.

Цепь – это линейно упорядоченное множество. Ясно, что любая цепь является решеткой.

Обозначим через C_n n-элементную цепь и рассмотрим прямое произведение $C_n\times C_m=\{(a, b) \mid a\in C_n, b\in C_m\}$. Ясно, что $C_n\times C_m$ будет решеткой из nm элементов.

Целью данной работы является вывод формулы для подсчета всех ретракций решетки $C_n\times C_2$.

Задача нахождения числа ретракций конечных решеток возникла в рамках теории полумодулей над полукольцами. Приведем некоторые исходные понятия этой теории [7, chapter 14].

Полукольцом называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot\rangle$ с коммутативно-ассоциативной операцией сложения + и ассоциативной операцией умножения $\cdot$, дистрибутивной относительно сложения с обеих сторон. Общая теория полуколец изложена в известной книге Голана [7]. Полукольцам с идемпотентным умножением посвящена наша работа [2].

Полумодулем над полукольцом S, или просто *S-полумодулем,* называется коммутативная полугруппа $\langle A, +\rangle$ вместе с отображением $S\times A \to A$, $(s, a)\to sa$, обладающим следующими свойствами (для любых $s, t\in S$ и $a, b\in A$):

(1) $(s+t)a=sa+ta$;
(2) $s(a+b)=sa+sb$;
(3) $(st)a=s(ta)$.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект № 24-21-00117.

Замечание 1.1. Мы не предполагаем наличия нуля 0 и единицы 1 в полукольце S и существования нуля 0 в коммутативной полугруппе A, но даже если таковые в S и A имеются, то для S-полумодулей A не предполагается выполнение следующих условий: $1a=a$, $0a=0$, $s0=0$ ($\forall s\in S$, $\forall a\in A$).

Отображение f: $A\to B$ S-полумодуля A в S-полумодуль B называется *S-гомоморфизмом*, если $f(x+y)=f(x)+f(y)$ и $f(sx)=sf(x)$ для любых x, $y\in A$ и $s\in S$. Если S-гомоморфизм S-полумодулей является взаимно однозначным отображением, то он называется *S-изоморфизмом*. S-изоморфные полумодули обладают одними и теми же абстрактными свойствами.

Пусть e – центральный мультипликативный идемпотент полукольца S, т. е. $ee=e$ и $\forall s\in S$ $es=se$. На любом S-полумодуле A элемент e действует как идемпотентный S-гомоморфизм e: $A\to A$ по правилу: $e(x)=ex$ для всех $x\in A$. Такой S-гомоморфизм e назовем *ретракцией* S-полумодуля A; его образ $e(A)$ будет подполумодулем S-полумодуля A, состоящим в точности из неподвижных элементов отображения e. В ряде случаев подполумодуль $e(A)$ однозначно определяет сам S-полумодуль A. В частности, это происходит тогда, когда $S=\{e\}$ – одноэлементное полукольцо, $\langle A, \leq\rangle$ – конечная полурешетка ($x+y=\sup\{x, y\}$), $\forall x\in A$ $ex\leq x$ или $\forall x\in A$ $x\leq ex$. В работе [3] найдено число таких попарно неизоморфных полумодулей A с числом элементов, не превосходящим 5. В случае конечной цепи A ее подцепь B совпадает с образом $e(A)$, вообще говоря, различных ретракций e.

Отношение эквивалентности ρ на решетке A называется *конгруэнцией* на A, если $a\rho b$ и $c\rho d$ влекут $(a+c)\rho(b+d)$ и $(ac)\rho(bd)$ для любых a, b, c, $d\in A$ (достаточно считать $c=d$).

Отметим, что каждая ретракция e решетки A порождает конгруэнцию $\rho(e)$ на решетке A по правилу

$$x\rho(e)y \text{ означает } ex=ey \text{ при любых } x, y\in A.$$

2. Число ретракций конечной цепи. Напомним, что *числами Фибоначчи* называются числа:

$$F_0=0,\ F_1=1,\ F_2=1,\ F_3=2,\ F_4=3,\ F_5=5,\ F_6=8,\ \ldots,$$

образованные по правилу $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ для всех натуральных чисел $n\geq 2$. Информацию о числах Фибоначчи можно найти, например, в параграфе 6.6 книги [5].

Теорема А [8, p. 228]. *Число всех ретракций n-элементной цепи равно числу Фибоначчи F_{2n} с номером $2n$.*

Теорема А опубликована J. M. Howie в 1971 году. В статье [9, Corollary 4.6] представлено другое доказательство этого результата.

Авторам известны два доказательства данной теоремы, отличные от указанных выше. Первое из них опубликовано в работе [1, задача 3.3.1, с. 34–35].

Приведем второе доказательство.

Докажем сначала ряд вспомогательных результатов.

Отождествим n-элементную цепь с отрезком первых n натуральных чисел с естественным порядком:

$$1< 2< 3< \ldots < n-1< n. \tag{1}$$

Для натуральных чисел $m\leq n$ положим:

$R(n)$ – число всех ретракций n-элементной цепи;

$R(n, m)$ – число ретракций n-элементной цепи с m неподвижными элементами;

$L(n)$ – число всех ретракций n-элементной цепи с неподвижными элементами 1 и $n\geq 2$;

$L(n, m)$ – число ретракций n-элементной цепи с $m\geq 2$ неподвижными элементами, среди которых 1 и n.

Имеем:

$$R(n)=\sum_{m=1}^{n} R(n,\ m) \text{ и } L(n)=\sum_{m=2}^{n} L(n,\ m). \tag{2}$$

Легко видеть, что $L(n, 2)=n-1$ для любого натурального числа $n\geq 2$. Поэтому число ретракций цепи (1) с m неподвижными числами $i_1< i_2< i_3< \ldots < i_m$ равно

$$(i_2-i_1)(i_3-i_2)\cdot\ldots\cdot(i_m-i_{m-1}). \tag{3}$$

Такие ретракции будем называть *ретракциями типа* $i_1< i_2< i_3< \ldots < i_m$, а число i_m-i_1+1 – их *длиной*.

Поэтому число $R(n)$ равно сумме произведений (3) по всевозможным выборкам $i_1< i_2< i_3< \ldots < i_m$ из первых n натуральных чисел.

Далее докажем ряд формул для чисел $L(n, m)$ и $R(n, m)$.

Следующие равенства очевидны (для соответствующих натуральных n):

$$R(n, 1)=n,\ R(n, n)=1,\ L(n, n)=1,\ R(n, n-1)=2n-2,\ L(n, n-1)=2n-4. \tag{4}$$

Предложение 2.1. *Для любых натуральных чисел $n \geq m \geq 3$ имеем:*

$$L(n, m)= \sum_{k=2}^{n-m+2}(k-1)L(n-k+1,\ m-1). \tag{5}$$

Доказательство. Возьмем произвольную ретракцию типа $1=i_1< i_2 <i_3< \ldots < i_m=n$. Элемент i_2 может принимать любые значения k от 2 до $n-m+2$ включительно. Легко видеть, что число указанных ретракций при $i_2=k$ равно произведению $(k-1)L(n-k+1, m-1)$. Тем самым получаем формулу (5).

Предложение 2.2. *Для любых натуральных чисел $n \geq m \geq 2$ имеем:*

$$R(n, m)= \sum_{k=m}^{n}(n-k+1)L(k,m). \tag{6}$$

Доказательство. Длина k любой ретракции типа $i_1< i_2<i_3< \ldots < i_m$ n-элементной цепи принимает значения от m до n включительно. Число таких ретракций длины k равно $(n-k+1)L(k, m)$. Поэтому имеет место формула (6).

Предложение 2.3. *Для любого натурального числа $n \geq 3$ верно равенство*

$$L(n, 3)=n(n-1)(n-2)/6= C_n^3. \tag{7}$$

Доказательство. С учетом формулы (4) по формуле (5) получаем:

$$L(n, 3)=1\cdot(n-2)+2(n-3)+\ldots+(n-2)\cdot 1=$$
$$=(n-1-1)+2(n-2-1)+\ldots+(n-2)(n-(n-2)-1)=$$
$$=(n-1)(1+2+\ldots+n-2)-(1^2+2^2+\ldots+(n-2)^2)=$$
$$=3(n-1)(n-2)(n-1)/6-(n-2)(n-1)(2n-3/6=$$
$$=(n-2)(n-1)(3n-3-2n+3)/6=(n-2)(n-1)n/6= C_n^3.$$

Предложение 2.4. *Для любых натуральных чисел $n \geq m$ верно равенство*

$$R(n, m)=L(n+1, m+1), \tag{8}$$

в частности, $R(n, 2)=L(n+1, 3)= C_{n+1}^3$.

Действительно, записав слагаемые правой части формулы (5) для $L(n+1, m+1)$ в обратном порядке, получим правую часть формулы (6), т. е. значение $R(n, m)$.

Предложение 2.5. *Для любого натурального числа $n \geq 2$* имеем:

$$L(n)=R(n-1). \tag{9}$$

В самом деле, в силу формул (2) и (8) получаем:

$$L(n)=L(n, 2)+L(n, 3)+\ldots+L(n, n)=R(n-1, 1)+R(n-1,2)+\ldots+R(n-1, n-1)=R(n-1).$$

Предложение 2.6. *Для любых натуральных чисел $n \geq m \geq 2$ верно равенство*

$$R(n, m)= \sum_{k=m}^{n}(n-k+1)R(k-1,m-1). \tag{10}$$

Доказательство вытекает из формул (6) и (8).

Предложение 2.7. *Для любого натурального числа $n \geq 3$ верно равенство*

$$R(n, n-2)=2n^2-7n+6. \tag{11}$$

Доказательство. По формуле (8) $R(n, n-2)=L(n+1, n-1)$. Поэтому рассмотрим ретракции длины $n+1$ с двумя подвижными элементами, не равными 1 и $n+1$. Число распределений двух элементов на $n-1$ местах равно числу $(n-1)(n-2)/2$ сочетаний из $n-1$ по 2. Если подвижные элементы расположены рядом, то получаем $3(n-2)$ ретракций. В противном случае имеем $4((n-1)(n-2)/2-(n-2))$ ретракций. В результате получаем:

$$R(n, n-2)=2(n^2-3n+2-2n+4)+3n-6=2n^2-7n+6.$$

Используя формулы (4), (5), (7), (8) и (11), вычислим значения $L(n, m)$ при $n \leq 9$ и $2 \leq m \leq n$. Имеем:

$L(2, 2)=1$,
$L(3, 2)=2$, $L(3, 3)=1$,
$L(4, 2)=3$, $L(4, 3)=4$, $L(4, 4)=1$,
$L(5, 2)=4$, $L(5, 3)=10$, $L(5, 4)=6$, $L(5, 5)=1$,
$L(6, 2)=5$, $L(6, 3)=20$, $L(6, 4)=21$, $L(6, 5)=8$, $L(6, 6)=1$,
$L(7, 2)=6$, $L(7, 3)=35$, $L(7, 4)=56$, $L(7, 5)=36$, $L(7, 6)=10$, $L(7, 7)=1$,
$L(8, 2)=7$, $L(8, 3)=56$, $L(7, 4)=126$, $L(8, 5)=36$, $L(8, 6)=55$, $L(8, 7)=12$, $L(8, 8)=1$,
$L(9, 2)=8$, $L(9, 3)=84$, $L(9, 4)=252$, $L(9, 5)=330$, $L(9, 6)=220$, $L(9, 7)=78$,
$L(9, 8)=14$ и $L(9, 9)=1$.

Имея найденные значения функции $L(n, m)$, по формуле (8) получаем:

$R(1, 1)=1$,
$R(2, 1)=2$, $R(2, 2)=1$,
$R(3, 1)=3$, $R(3, 2)=4$, $R(3, 3)=1$,
$R(4, 1)=4$, $R(4, 2)=10$, $R(4, 3)=6$, $R(4, 4)=1$,
$R(5, 1)=5$, $R(5, 2)=20$, $R(5, 3)=21$, $R(5, 4)=8$, $R(5, 5)=1$,
$R(6, 1)=6$, $R(6, 2)=35$, $R(6, 3)=56$, $R(6, 4)=36$, $R(6, 5)=10$, $R(6, 6)=1$,
$R(7, 1)=7$, $R(7, 2)=56$, $R(7, 3)=126$, $R(7, 4)=120$, $R(7, 5)=55$, $R(7, 6)=12$, $R(7,7)=1$,
$R(8, 1)=8$, $R(8, 2)=84$, $R(8, 3)=252$, $R(8, 4)=330$, $R(8, 5)=220$, $R(8, 6)=78$, $R(8, 7)=14$ и $R(8, 8)=1$.

Суммируя по m значения $R(n, m)$ в предыдущих строках, получаем по формуле (2):

$$R(1)=1,\ R(2)=3,\ R(3)=8,\ R(4)=21,\ R(5)=55,$$
$$R(6)=144,\ R(7)=377,\ R(8)=987.$$

Мы видим, что напрашивается следующее рекуррентное соотношение: $R(n)=3R(n-1)-R(n-2)$ при всех натуральных $n\geq 3$.

Предложение 2.8. *Для любого натурального числа* $n\geq 3$ *имеем:*

$$R(n+1)=R(n)+2R(n-1)+3R(n-2)+\ldots+(n-2)R(3)+(n-1)R(2)+nR(1)+n+1. \tag{12}$$

Доказательство. Распишем $R(n+1)$ на основании формул (2) и (10):

$$R(n+1, 1)=n+1$$
$$R(n+1, 2)=nR(1, 1)+(n-1)R(2, 1)+(n-2)R(3, 1)+\ldots+3R(n-2, 1)+2R(n-1, 1)+R(n, 1)$$
$$R(n+1, 3)=(n-1)R(2, 2)+(n-2)R(3, 2)+\ldots+3R(n-2, 2)+2R(n-1, 2)+R(n, 2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$R(n+1, n-1)=3R(n-2, n-2)+2R(n-1, n-2)+R(n, n-2)$$
$$R(n+1, n)=2R(n-1, n-1)+R(n, n-1)$$
$$R(n+1, n+1)=R(n, n).$$

Просуммируем последовательно выписанные равенства почленно, начиная со второго равенства и первых с конца слагаемых, а затем прибавим $n+1$. В результате получим равенство (12).

Предложение 2.9. *Для любого натурального числа* $n\geq 3$ *имеем:*

$$R(n)=R(n-1)+3R(n-2)+2R(n-2)+2R(n-3)+\ldots+2R(1)+2. \tag{13}$$

Доказательство. Для любой ретракции e n-элементной цепи (1) выполняется ровно одно из следующих условий:

1) $e(1)=1$ и $e(n)=n$;
2) $e(1)> 1$ и $e(n)< n$;
3) $e(1)=1$ и $e(n)< n$;
4) $e(1)> 1$ и $e(n)=n$.

Число ретракций e с условием 1) равно $R(n-1)$ по формуле (9).

Ясно, что число ретракций e с условием 2) равно $R(n-2)$.

Рассмотрим условие 3). Число $k=e(n)$ принимает значение от 1 до $n-1$. Число таких ретракций e, в силу формулы (9), равно $1+R(1)+R(2)+\ldots+R(n-2)$.

Условие 4) симметрично условию 3). Поэтому число ретракций e с условием 4) также равно $1+R(1)+R(2)+\ldots+R(n-2)$.

Суммируя указанные выражения, получаем искомое равенство (13).

Предложение 2.10. *Для любого натурального числа* $n\geq 3$ *верно равенство*

$$R(n)=3R(n-1)-R(n-2). \tag{14}$$

Доказательство проведем индукцией по n. Предположив справедливость равенства (14) для всех натуральных чисел k (вместо n), $3\leq k\leq n$, докажем его для $n+1$. Подставив в равенстве (12) $R(k)=3R(k-1)-R(k-2)$ для всех k от 3 до n, получаем:

$$R(n+1)=3R(n-1)-R(n-2)+2(3R(n-2)-R(n-3))+\ldots+(n-2)(3R(2)-R(1))+$$
$$(n-1)R(2)+nR(1)+n+1=$$
$$=3[R(n-1)+2R(n-2)+\ldots+(n-2)R(2)+(n-1)R(1)+n]-$$
$$[R(n-2)+2R(n-3)+\ldots+(n-2)R(1)+n-1]=3R(n)-R(n-1),$$

поскольку $(n-1)R(2)=3(n-1)R(1)$ и $nR(1)+n+1=2n+1=3n-(n-1)$.

Предложение доказано.

Лемма 2.1. $F_{n+2}=3F_n-F_{n-2}$ *для любого натурального числа* $n\geq 3$.

В самом деле,

$$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n=(F_n+F_{n-1})+F_n=(F_n+F_{n-1}+F_{n-2})+F_n-F_{n-2}=3F_n-F_{n-2}.$$

Теперь

Доказательство теоремы А вытекает из формулы (14), леммы 2.1 и равенств $R(1)=1=F_2$, $R(2)=3=F_4$.

Следствие 2.1. *Последовательность чисел $R(1)$, $R(2)$, …, $R(n)$,… представляет собой последовательность чисел Фибоначчи с четными натуральными номерами.*

Следствие 2.2. *На n-элементной цепи – с точностью до изоморфизма – существует ровно F_{2n} полумодулей над одноэлементным полукольцом.*

Следствие 2.3. *Для любого натурального числа $n\geq 3$* имеем:

$$R(n)=2R(n-1)+R(n-2)+\ldots+R(1)+1. \tag{15}$$

Доказательство. Подставим в равенства (13) и (14) $n+1$ вместо n. Приравняем правые части полученных равенств. Выразив $R(n)$ через остальные слагаемые, получим равенство (15).

Следствие 2.4. *Для любого натурального числа $n\geq 3$* имеем:

$$F_{2n}=2F_{2n-2}+F_{2n-4}+\ldots+F_2+1. \tag{16}$$

В силу теоремы А формула (15) превращается в формулу (16).

Аналогично, формулы (12) и (13) дают соответствующие равенства для чисел Фибоначчи с четными номерами.

Замечание 2.1. Равенства (12)–(15) представляют собой рекуррентные соотношения для функции $R(n)$, но только равенство (14) является «свернутой» формулой для $R(n)$ с начальными условиями $R(1)=1$ и $R(2)=3$.

3. Число ретракций прямого произведения двухэлементной и *n*-элементной цепей. Рассмотрим прямое произведение $A\times B$ решеток A и B. Пусть e_1 и e_2 – ретракции решеток A и B соответственно. Тогда отображение $e_1\times e_2$: $A\times B\to A\times B$, определенное формулой

$$(e_1\times e_2)((a, b))=(e_1a, e_2b) \text{ при } a\in A \text{ и } b\in B,$$

является ретракцией решетки $A\times B$.

Лемма 3.1 [4, с. 43, теорема 13]. *Произвольная конгруэнция ρ на решетке $A\times B$ имеет вид $\rho=\rho_1\times\rho_2$, где ρ_1 (ρ_2) – конгруэнция на решетке A (B) и $(a_1, b_1)(\rho_1\times\rho_2)(a_2, b_2)$ означает $a_1\rho_1a_2$ и $b_1\rho_2b_2$ для любых a_1, $a_2\in A$ и b_1, $b_2\in B$.*

Пусть ρ – произвольная конгруэнция на прямом произведении $A\times B$ решеток A и B. В контексте леммы 3.1 $\rho=\rho_1\times\rho_2$. Предположим, что конгруэнция ρ_1 (ρ_2) индуцируется некоторой ретракцией e_1 (e_2) решетки A (B): $\rho_1=\rho(e_1)$ и $\rho_2=\rho(e_2)$. Ретракция $e_1\times e_2$ порождает исходную конгруэнцию ρ, то есть $\rho=\rho(e_1\times e_2)$. Заметим, что конгруэнция ρ может индуцироваться ретракцией решетки $A\times B$, отличной от ретракций вида $e_1\times e_2$. Ретракции вида $e_1\times e_2$ будем называть *каноническими ретракциями*, в противном случае – *неканоническими*.

Легко видеть, что имеет место

Лемма 3.2. *Если A и B – конечные решетки, имеющие соответственно k и l ретракций, то решетка $A\times B$ имеет ровно $k\cdot l$ канонических ретракций.*

Предложение 3.1. *Пусть A, B – произвольные решетки. Для того чтобы ретракция e решетки $A\times B$ была канонической, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее утверждение: если $\rho(e)=\rho_1\times\rho_2$, a_1, $a_2\in A$, b_1, $b_2\in B$, $e((a_1, b_1))=(a_1, b_1)$ и $e((a_2, b_2))=(a_2, b_2)$, то $a_1\rho_1a_2\Rightarrow a_1=a_2$ и $b_1\rho_2b_2\Rightarrow b_1=b_2$.*

Доказательство. *Необходимость.* Допустим, что $e=e_1\times e_2$ для ретракции e_1 на решетке A и ретракции e_2 на решетке B и выполняется условие из указанного в формулировке утверждения. Тогда $\rho_1=\rho(e_1)$, $a_1=e_1(a_1)$, $a_2=e_1(a_2)$, стало быть, $a_1\rho_1a_2 \Leftrightarrow e_1(a_1)=e_1(a_2)$. Аналогично, $b_1\rho_2b_2 \Rightarrow b_1=b_2$.

Достаточность. Пусть верно утверждение из формулировки данного предложения. Для любых $a\in A$ и $b\in B$ положим $e_1(a)=p_1(e((a, b)))$ и $e_2(b)=p_2(e((a, b)))$, где $p_1((x, y))=x$ и $p_2((x, y))=y$ для всех $x\in A$ и $y\in B$. Покажем, что значение $e_1(a)$ не зависит от второй координаты b пары (a, b). Возьмем пару (a, c), где $c\in B$. Поскольку $e((a, b))\rho(a, b)$ и $e((a, c))\rho(a, c)$, то $p_1(e((a, b)))\rho_1a\rho_1p_1(e((a, c)))$. Поэтому $p_1(e((a, b)))=p_1(e((a, c)))$. Аналогично доказывается, что значение $e_2(b)$ не зависит от первой координаты пары (a, b). Легко видеть, что отображения e_1 и e_2 служат ретракциями решеток A и B соответственно. Равенство $e=e_1\times e_2$ очевидно.

Пример 3.1. Найдем все ретракции решетки $C_2\times C_2=\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$, где $C_2=\{0, 1\}$ при $0< 1$. Цепь C_2 имеет три ретракции: константные $A\to\{0\}$, $A\to\{1\}$ и тождественную, и две конгруэнции: отношение равенства и одноклассовую. Поэтому решетка $C_2\times C_2$ обладает девятью каноническими ретракциями и четырьмя конгруэнциями. Одноклассовая конгруэнция на решетке $C_2\times C_2$ порождается четырьмя ретракциями, отношение равенства – только тождественной ретракцией, каждая из двух двухклассовых конгруэнций – 2 каноническими ретракциями. Возьмем на решетке $C_2\times C_2$ конгруэнцию ρ с двумя классами $\{0, 1\}\times\{0\}$ и $\{0, 1\}\times\{1\}$. И рассмотрим отображение e: $C_2\times C_2\to C_2\times C_2$, переводящее класс $C_2\times\{0\}$ в элемент $(0, 0)$, а класс $C_2\times\{1\}$ – в элемент $(1, 1)$. По предложению 3.1 e будет неканонической ретракцией решетки $C_2\times C_2$, порождающей конгруэнцию ρ. Аналогично, двойственная к e неканическая ретракция порождает конгруэнцию с двумя классами $\{0\}\times C_2$ и $\{1\}\times C_2$. Таким образом, решетка $C_2\times C_2$ имеет 11 ретракций, включая две неканонические ретракции.

Обозначим $\mathrm{Ret}(n, m)$ – число всех ретракций прямого произведения n-элементной цепи C_n и m-элементной цепи C_m и найдем рекуррентную формулу для $\mathrm{Ret}(n, 2)$ числа всех ретракций решетки $C=C_n\times C_2$.

По лемме 3.2 число всех канонических ретракций на C равно $F_{2n}\cdot F_4=3F_{2n}$.

Число неканонических ретракций на C в случае, если конгруэнция цепи C_n одноклассовая, равно

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1=n(n-1)/2.$$

Далее обозначим $f(n)$ – число неканонических ретракций на C в случае, если конгруэнция цепи C_n неодноклассовая.

Лемма 3.3. *Для любого натурального числа $n\geq 2$ справедлива формула*

$$f(n)=1\cdot[f(n-1)+F_{2(n-1)}]+2\cdot[f(n-2)+F_{2(n-2)}]+\ldots+(n-1)\cdot[f(1)+F_2]. \quad (17)$$

Доказательство. Обозначим цепь C_n как $1< 2< 3< \ldots < k < \ldots < n-1< n$, а цепь C_2, соответственно, $a<b$. Найдем все конгруэнции на C, порождающие неканонические ретракции, в случае, когда конгруэнция цепи C_n неодноклассовая. Ясно, что при этом конгруэнция на C_2 должна быть одноклассовой. Рассмотрим конгруэнции на C_n, одним из классов которых является отрезок $1< 2< 3< \ldots < k$, где $k<n$. Любому элементу из данного отрезка будет соответствовать элемент a цепи C_2. Поэтому всего получим k таких конгруэнций. В каждой из них остальным $n-k$ элементам цепи C_n будут соответствовать конгруэнции, порождающие неканонические ретракции решетки $C_{n-k}\times C_2$ и канонические ретракции $n-k$ элементной цепи, всего $f(n-k)+F_{2(n-k)}$ ретракций. Теперь, суммируя по всем k от 1 до $n-1$, получаем требуемую формулу.

Лемма 3.4. *Для любого натурального числа $n\geq 2$ справедлива формула*

$$f(n)=3f(n-1)-f(n-2)+F_{2(n-1)}. \quad (18)$$

Доказательство. В силу леммы 3.3

$$f(n)-f(n-1)=$$
$$=(1\cdot[f(n-1)+F_{2(n-1)}]+2\cdot[f(n-2)+F_{2(n-2)}]+\ldots+(n-1)\cdot[f(1)+F_2])-$$
$$-(1\cdot[f(n-2)+F_{2(n-2)}]+2\cdot[f(n-3)+F_{2(n-3)}]+\ldots+(n-2)\cdot[f(1)+F_2])=$$
$$=[f(n-1)+F_{2(n-1)}]+([f(n-2)+F_{2(n-2)}]+\ldots+[f(1)+F_2])=$$
$$=[f(n-1)+F_{2(n-1)}]+(f(n-1)-f(n-2))=2f(n-1)-f(n-2)+F_{2(n-1)},$$

откуда

$$f(n)=3f(n-1)-f(n-2)+F_{2(n-1)}.$$

Пример 3.2. Вычислим несколько первых значений $f(n)$ и $\mathrm{Ret}(n, 2)$. Имеем $f(1)=0, f(2)=1$. Тогда

$$f(3)=3f(2)-f(1)+F_4=3\cdot 1-0+3=6;$$
$$f(4)=3f(3)-f(2)+F_6=3\cdot 6-1+8=25;$$
$$f(5)=3f(4)-f(3)+F_8=3\cdot 25-6+21=90;$$
$$f(6)=3f(5)-f(4)+F_{10}=3\cdot 90-25+55=300;$$
$$f(7)=3f(6)-f(5)+F_{12}=3\cdot 300-90+144=954,$$

поэтому

$$\mathrm{Ret}(2, 2)=f(2)+3F_4+2\cdot 1/2=1+3\cdot 3+1=11;$$
$$\mathrm{Ret}(3, 2)=f(3)+3F_6+3\cdot 2/2=6+3\cdot 8+3=33;$$
$$\mathrm{Ret}(4, 2)=f(4)+3F_8+4\cdot 3/2=25+3\cdot 21+6=94;$$
$$\mathrm{Ret}(5, 2)=f(5)+3F_{10}+5\cdot 4/2=90+3\cdot 55+10=265;$$
$$\mathrm{Ret}(6, 2)=f(6)+3F_{12}+6\cdot 5/2=300+3\cdot 144+15=747;$$
$$\mathrm{Ret}(7, 2)=f(7)+3F_{14}+7\cdot 6/2=954+3\cdot 377+21=2106.$$

Замечание 3.1. По формуле (18)

$$f(n)=3f(n-1)-f(n-2)+F_{2(n-1)},$$

причем $f(1)=0, f(2)=1=F_2$.

Тогда

$$f(3)=3f(2)-f(1)+F_4=3F_2-0+F_4=3F_2+1F_4=F_4F_2+F_2F_4;$$
$$f(4)=3f(3)-f(2)+F_6=3(3F_2+1F_4)-F_2+F_6=8F_2+3F_4+1F_6=F_6F_2+F_4F_4+F_2F_6;$$
$$f(5)=3f(4)-f(3)+F_8=3(8F_2+3F_4+1F_6)-(3F_2+1F_4)+F_8=21F_2+8F_4+3F_6+1F_8=$$
$$=F_8F_2+F_6F_4+F_4F_6+F_2F_8;$$
$$f(6)=3f(5)-f(4)+F_{10}=3(21F_2+8F_4+3F_6+1F_8)-(8F_2+3F_4+1F_6)+F_{10}=$$
$$=55F_2+21F_4+8F_6+3F_8+1F_{10}=F_{10}F_2+F_8F_4+F_6F_6+F_4F_8+F_2F_{10}.$$

Предложение 3.2. *Для любого натурального числа $n\geq 2$ справедлива формула*

$$f(n)=\sum_{i+j=n}(F_{2i}\cdot F_{2j}). \quad (19)$$

Доказательство проведем индукцией по n. База индукции проверена в замечании 3.1.

Пусть для натуральных чисел, меньших n, формула верна. Тогда

$$f(n)= 3f(n-1)-f(n-2)+F_{2(n-1)}=$$
$$=3(F_{2(n-2)}F_2+F_{2(n-3)}F_4+\ldots+F_4F_{2(n-3)}+ F_2F_{2(n-2)})-$$
$$-(F_{2(n-3)}F_2+ F_{2(n-4)}F_4+\ldots+ F_4 F_{2(n-4)}+ F_2 F_{2(n-3)}) +F_{2(n-1)}=$$
$$=(3F_{2(n-2)}- F_{2(n-3)})F_2+(3F_{2(n-3)}- F_{2(n-4)})F_4+\ldots+(3F_4- F_2)F_{2(n-3)}+3F_2F_{2(n-2)}+1F_{2(n-1)}=$$
$$=F_{2(n-1)}F_2+ F_{2(n-2)}F_4+\ldots+ F_6F_{2(n-3)}+ F_4F_{2(n-2)}+ F_2F_{2(n-1)}.$$

Предложение доказано.

Таким образом, суммируя вышесказанное, получаем следующий результат.

Теорема 3.1. *Для натурального числа n имеет место формула*

$$\mathrm{Ret}(n, 2)=f(n)+3F_{2n}+n(n-1)/2= \sum_{i+j=n}(F_{2i}\cdot F_{2j}) +3F_{2n}+n(n-1)/2. \tag{20}$$

Пример 3.3. Вычислим с помощью формулы (20) несколько первых значений Ret(n, 2):

$$\mathrm{Ret}(2, 2) = \sum_{i+j=2}(F_{2i}\cdot F_{2j}) +3F_4+2\cdot(2-1)/2= F_2\cdot F_2+3F_4+1= 1\cdot1+3\cdot3+1=11;$$

$$\mathrm{Ret}(3, 2) = \sum_{i+j=3}(F_{2i}\cdot F_{2j}) +3F_6+3\cdot(3-1)/2= F_2\cdot F_4+ F_4\cdot F_2+3F_6+3= 2\cdot1\cdot3+3\cdot8+3=33;$$

$$\mathrm{Ret}(4, 2) = \sum_{i+j=4}(F_{2i}\cdot F_{2j}) +3F_8+4\cdot(4-1)/2= F_2\cdot F_6+ F_4\cdot F_4+ F_6\cdot F_2+3F_8+6=2\cdot1\cdot8+3\cdot3+3\cdot21+6=94;$$

$$\mathrm{Ret}(5, 2) = \sum_{i+j=5}(F_{2i}\cdot F_{2j}) +3F_{10}+5\cdot(5-1)/2= F_2\cdot F_8+ F_4\cdot F_6+ F_6\cdot F_4 + F_8\cdot F_2+3F_{10}+10=$$
$$=2\cdot1\cdot21+2\cdot3\cdot8+3\cdot55+10=265.$$

Замечание 3.2. В статье [6] получена формула для числа всех ретрактов прямого произведения $C_m\times C_n$ при любых натуральных числах m и n. В частности, число ретрактов решетки $C_2\times C_2$ равно 10, в то время как число ее ретракций равно 11. Отметим, что ретракт решетки может быть образом ее различных ретракций.

Список литературы

1. *Вечтомов Е. М., Мамаев А. А.* Комбинаторные задачи о функциях и бинарных отношениях // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2025. Вып. 2 (55). С. 20–37.

2. *Вечтомов Е. М., Петров А. А.* Функциональная алгебра и полукольца. Полукольца с идемпотентным умножением. СПб. : Лань, 2022. 180 с.

3. *Вечтомов Е. М., Петров А. А., Шкляев А. П.* Конечные полумодули над трехэлементными мультипликативно идемпотентными полукольцами // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. № 3 (66). С. 5–15.

4. *Гретцер Г.* Общая теория решеток. М. : Мир, 1981. 456 с.

5. *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. Основание информатики. М. : Мир, 1998. 703 с.

6. *Czédli G.* Lattices of retracts of direct products of two finite chains and notes on retracts of lattices // Algebra Universalis. 2022. Vol. 83. Is. 3. № 34.

7. *Golan J. S.* Semirings and their applications. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1999. 382 p.

8. *Howie J. M.* Products of idempotents in certain semigroups of transformations // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. 1971. Vol. 17. Is. 3. Pp. 223–236.

9. *Laradji A., Umar A.* Combinatorial results for semigroups of order-preserving full transformations // Semigroup Forum. 2006. Vol. 72. Is. 1. Pp. 51–62.

About the number of retractions of directs product two finite chains

Vechtomov Evgenii Mikhailovich[1], Petrov Andrei Aleksandrovich[2]

[1]Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, researcher at the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: vecht@mail.ru

[2]PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Fundamental Mathematics Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: apetrov43@mail.ru

Abstract. In this paper, we study the retractions of the direct product of two finite chains. By a retraction of a lattice A, we mean an idempotent homomorphism of A into itself. We have found and proved the formula for counting of all the retractions of the direct product of a two-element chain with an n-element chain.

Keywords: retraction, n-element chain, Fibonacci numbers, direct product of chains.

References

1. *Vechtomov E. M., Mamaev A. A. Kombinatornye zadachi o funkcijah i binarnyh otnoshenijah* [Combinatorial problems about functions and binary relations] *// Syktyvkar University Bulletin. Series 1: Mathematics. Mechanics. Computer Science* – Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2025. Is. 2 (55). Pp. 20–37.

2. *Vechtomov E. M., Petrov A. A. Funkcional'naja algebra i polukol'ca. Polukol'ca s idempotentnym umnozheniem* [Functional algebra and semirings. Semirings with idempotent multiplication]. SPb., Lan', 2022. 180 p.

3. *Vechtomov E. M., Petrov A. A., Shkljaev A. P. Konechnye polumoduli nad trehjelementnymi mul'tiplikativno idempotentnymi polukol'cami* [Finite semimodules over three-element multiplicatively idempotent semirings] // *Perm University Bulletin. Mathematics. Mechanics. Computer Science* – Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2024. No. 3 (66). Pp. 5–15.

4. *Grätzer G. Obshhaja teorija reshetok* [General Lattice Theory]. M., Mir, 1981. 456 p.

5. *Graham R., Knuth D., Patashnik O. Konkretnaja matematika. Osnovanie informatiki* [Concrete Mathematics. A Foundation of Computer Science]. M., Mir, 1998. 703 p.

6. *Czédli G.* Lattices of retracts of direct products of two finite chains and notes on retracts of lattices // Algebra Universalis. 2022. Vol. 83. Is. 3. No. 34.

7. *Golan J. S.* Semirings and their applications. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1999. 382 p.

8. *Howie J. M.* Products of idempotents in certain semigroups of transformations // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. 1971. Vol. 17. Is. 3. Pp. 223–236.

9. *Laradji A., Umar A.* Combinatorial results for semigroups of order-preserving full transformations // Semigroup Forum. 2006. Vol. 72. Is. 1. Pp. 51–62.

Поступила в редакцию: 07.10.2025
Принята к публикации: 30.10.2025

УДК 544.272:519.6 EDN: KANLXD

Сравнение вычислительных методов молекулярной динамики

Чупраков Павел Григорьевич[1], Кабанов Егор Андреевич[2], Гавриленков Алексей Евгеньевич[3]
[1]кандидат биологических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: email@gmail.com
[2]студент направления подготовки «Прикладная математика и информатика»,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: sergeyrootuser@gmail.com
[3]студент направления подготовки «Прикладная математика и информатика»,
Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: Alekceygavr01082004@gmail.com

Аннотация. Актуальность исследования определяется широкой востребованностью молекулярной динамики для моделирования процессов на атомном уровне, где выбор численного метода интегрирования существенно влияет на точность и устойчивость результатов. Цель исследования – сравнительный анализ различных численных методов интегрирования в молекулярной динамике, реализованных на языке C++ с единым интерфейсом. Разработана программная платформа для генерации начальных условий, интегрирования системы одинаковыми методами и оценки точности по среднеквадратичной ошибке. Работа включает теоретический анализ алгоритмов и их численную верификацию на модельной задаче с потенциалом Леннарда-Джонса. Для исследования были рассмотрены метод Рунге – Кутты 4-го порядка [2], классический алгоритм Верле [3], скоростной Верле [3], метод с перескоками (leapfrog) [4], метод Бимана – Шофилда [5] и предиктор-корректор [6]. Основные результаты демонстрируют, что модификации Верле и метод Бимана – Шофилда обеспечивают наименьшую среднеквадратичную ошибку (MSE [7]) и высокую численную устойчивость при различных параметрах моделирования, в то время как стандартный алгоритм Верле наиболее чувствителен к накоплению погрешностей. Полученные данные могут быть использованы для оптимизации вычислительных экспериментов в задачах физики твердого тела, химии, материаловедения и биомолекулярных исследований.

Ключевые слова: молекулярная динамика, численные методы интегрирования, устойчивость алгоритмов, среднеквадратичная ошибка, симуляция атомных систем, вычислительный эксперимент.

Введение. Молекулярная динамика [1] – важный метод численного моделирования, позволяющий отслеживать эволюцию атомных и молекулярных систем через интегрирование классических уравнений движения. Эффективность и стабильность моделирования во многом зависят от выбранного численного алгоритма. Целью настоящей работы является сравнительный анализ численных методов интегрирования в молекулярной динамике, их реализация в единой программной платформе и оценка точности и устойчивости при различных параметрах моделирования. Основные задачи исследования состоят в следующем:

– Разработка единой программы на C++ для реализации и сравнения алгоритмов интегрирования.

– Численная верификация корректности работы методов.

– Оценка точности (через среднеквадратичную ошибку, MSE) и устойчивости при различных шагах интегрирования.

Математическая модель. Рассматривается замкнутая система, состоящая из однотипных молекул, расположенных в кубе заданного объема $V = L^3$. Гамильтониан системы имеет вид [1]:

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{m}{2} ||v_i||^2 + \sum_{i<j}^{N} u(|r_i - r_j|), \tag{1}$$

где:

– m – масса молекулы;

– r_i – радиус-вектор i-й молекулы;

– v_i – скорость i-й молекулы;

– $u(r)$ – потенциал межмолекулярного взаимодействия;

– $|r_i - r_j|$ – расстояние между i-й и j-й молекулами.

Для описания взаимодействия используется потенциал Леннарда-Джонса [1]:

$$u(r) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right], \tag{2}$$

где:

– ε – глубина потенциальной ямы;

– σ – расстояние, на котором потенциал равен нулю;

– r – расстояние между центрами двух молекул.

Сила, действующая между двумя молекулами, определяется как градиент потенциала:

$$F(r_{ij}) = -\nabla_i u(r_{ij}) = 24\varepsilon\left[2\frac{\sigma^{12}}{r_{ij}{}^{13}} - \frac{\sigma^6}{r_{ij}{}^{7}}\right]\frac{r_i - r_j}{r_{ij}}, \tag{3}$$

где – расстояние между центрами двух молекул.

На основе гамильтониана выводятся классические уравнения движения для молекул:

$$\frac{dr_i}{dt} = v_i$$
$$m\frac{dv_i}{dt} = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N} F(|r_i - r_j|). \tag{4}$$

Обезразмеривание упрощает уравнения, позволяя работать с универсальными безразмерными параметрами:

– ε – глубина потенциальной ямы;

– σ – расстояние, на котором потенциал равен нулю;

– m – масса молекулы.

Введем безразмерные переменные на основе характерных масштабов системы:

– $r^* = \frac{r}{\sigma}$ – безразмерное расстояние;

– $t^* = \frac{t}{\sqrt{\frac{m\sigma^2}{\varepsilon}}}$ – безразмерное время;

– $v^* = \frac{v\sqrt{\frac{m\sigma^2}{\varepsilon}}}{\sigma}$ – безразмерная скорость;

– $F^* = \frac{F\sigma}{\varepsilon}$ – безразмерные силы.

После замены исходные уравнения движения приводятся к виду:

$$\frac{dr_i^*}{dt^*} = v_i^*,$$
$$\frac{dv_i^*}{dt^*} = a_i^*, \tag{5}$$

где $a_i^* = F_i^*$.

Начальные и граничные условия. Начальные координаты молекул равномерно распределяются внутри куба со стороной L, определяемой числом частиц и заданной плотностью. Начальные скорости формируются по нормальному распределению с нулевым средним и дисперсией v, при этом осуществляется корректировка для обнуления суммарного импульса системы.

Для снижения граничных эффектов применяются отражающие граничные условия, при выходе молекулы за границы куба ее координата отражается, а соответствующая компонента скорости меняет знак.

Численные методы интегрирования.

– Метод Рунге – Кутты 4-го порядка – высокоточный метод с локальной ошибкой $O(\Delta t^5)$. Новое значение функции считается так:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{dt}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \tag{6}$$

где:

$$k_1 = f(t_n; y_n)$$
$$k_2 = f(t_n + \frac{dt}{2}; y_n + \frac{dt}{2}k_1)$$
$$k_3 = f\left(t_n + \frac{dt}{2}; y_n + \frac{dt}{2}k_2\right)$$
$$k_4 = f(t_n + dt; y_n + dt \cdot k_3) \tag{7}$$

– Метод Верле – метод, сохраняющий энергию на длительных временах.

$$x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} + a_n dt^2$$

$$v_n = \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2dt} \tag{8}$$

Предполагает хранение координат с предыдущего шага.

– Скоростной метод Верле – модификация метода Верле с явным учетом скоростей.

$$\begin{gathered} x_{n+1} = x_n + v_n dt + \frac{1}{2} a_n dt^2 \\ v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})dt \end{gathered} \tag{9}$$

– Метод с перескоками (leapfrog) разделяет обновление координат и скоростей на полушагах.

$$\begin{gathered} v_{n+\frac{1}{2}} = v_n + \frac{1}{2} a_n dt \\ x_{n+1} = x_n + v_{n+\frac{1}{2}} dt \\ v_{n+1} = v_{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} a_{n+1} dt \end{gathered} \tag{10}$$

– Метод Бимана – Шофилда использует информацию о силах на предыдущем шаге для повышения точности.

$$\begin{gathered} x_{n+1} = x_n + v_n dt + \frac{dt^2}{6}(4a_n - a_{n-1}) \\ v_{n+1} = v_n + \frac{dt}{6}(2a_{n+1} + 5a_n - a_{n-1}) \end{gathered} \tag{11}$$

Предусматривает использование ускорений, вычисленных на предыдущем шаге моделирования.

– Предиктор-корректор – предсказывает состояние системы и корректирует его на основе новых вычислений сил.

$$\begin{gathered} x_{n+1}^p = x_n + v_n dt + \frac{1}{2} a_n dt^2 \\ v_{n+1}^p = v_n + a_n dt \\ x_{n+1} = x_n + v_n dt + \frac{1}{2} a_{n+1}^p dt^2 \\ v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}\left(a_n + a_{n+1}^p\right) dt \end{gathered} \tag{12}$$

Для методов Верле и с перескоками (leapfrog) критически важно отслеживать сохранение полной энергии системы на протяжении всего моделирования. Это позволяет оценить корректность численного интегрирования и устойчивость симуляции. Тем не менее в рамках данной работы контроль энергии не осуществлялся.

Для сравнения методов вычисляется среднеквадратичная ошибка (MSE) позиций молекул относительно эталонного метода (выбираемого пользователем). Накопленная MSE усредняется по всем шагам моделирования для оценки долговременной стабильности методов.

Для объективной оценки точности и производительности методов интегрирования уравнений движения в молекулярной динамике была разработана специализированная программа на C++. Программа реализует следующие ключевые функции:

– генерация начальных условий (с заданной плотностью);

– генерация начальных скоростей по нормальному распределению с последующей коррекцией для обнуления общего импульса системы;

– интеграция траекторий шестью различными методами;

– вычисление среднеквадратичной ошибки (MSE) позиций молекул относительно эталонного решения;

– возможность рассматривать модель пошагово.

Разработанная программа реализует уникальную схему сравнения, при которой все методы интегрирования выполняются параллельно на идентичных начальных условиях с синхронизацией на каждом шаге моделирования. Все методы интегрирования запускаются с одинаковыми начальными условиями, что обеспечивает корректность сравнения. Пользователь может выбрать любой из реализованных методов в качестве эталонного для расчета MSE. По умолчанию установлен метод Рунге – Кутты 4-го порядка как теоретически наиболее точный. Внешний вид программы представлен на рисунке 1.

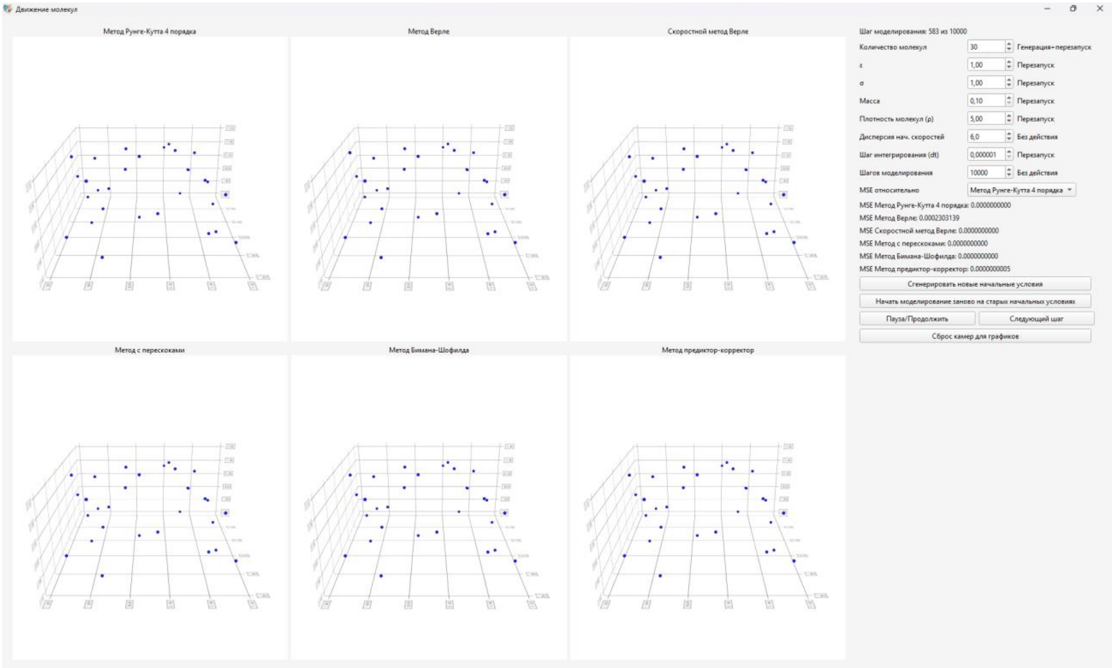

Рис 1. Внешний вид программы

Была выполнена серия экспериментов с использованием различных эталонных методов. Результаты моделирования после 10 000 шагов при различных начальных условиях представлены в табл. 1–10. Табл. 1–3 содержат сравнение в зависимости от числа молекул, табл. 4–6 – от значения параметра ε, табл. 7–8 – от значения σ, а табл. 9–10 – от массы молекул m.

Таблица 1

10 молекул, 10^{-6}, дисперсия начальных скоростей молекул 6 усл. ед., плотность 5 молекул/усл. ед³., ε = σ = 1, масса каждой молекулы 0,1 усл. ед.

Эталонный метод	Рунге – Кутты 4	Верле	Скоростной Верле	С перескоками	Бимана – Шофилда	Предиктор-корректор	Среднее MSE
Рунге – Кутты 4	–	3.3100360638	2.2898682149	2.1232286169	2.2869681771	2.3140359918	2.4648274129
Верле	3.3100360638	–	3.0844523786	3.3020672680	3.4195531569	2.9295180608	3.2091253856
Скоростной Верле	2.2898682149	3.0844523786	–	1.5810178947	2.0636582703	2.3913571445	2.2820707806
С перескоками	2.1232286169	3.3020672680	1.5810178947	–	1.8999596196	2.3642910427	2.2541128884
Бимана – Шофилда	2.2869681771	3.4195531569	2.0636582703	1.8999596196	–	2.2234322803	2.3787143008
Предиктор-корректор	2.3140359918	2.9295180608	2.3913571445	2.3642910427	2.2234322803	–	2.4445269040

Для следующего эксперимента количество молекул увеличено до 30. Начальные координаты и скорости сгенерированы заново при сохранении остальных параметров моделирования.

Таблица 2

30 молекул, 10^{-6}, дисперсия начальных скоростей молекул 6 усл. ед., 5 молекул/усл. ед³., ε = σ = 1, масса каждой молекулы 0,1 усл. ед.

Эталонный метод	Рунге – Кутты 4	Верле	Скоростной Верле	С перескоками	Бимана – Шофилда	Предиктор–корректор	Среднее MSE
Рунге – Кутты 4	–	5.5670535546	4.4656635893	4.5755111600	4.6260248227	4.6189603152	4.7706426884
Верле	5.5670535546	–	5.2017358280	5.3256159362	5.4409951064	5.5711764325	5.4213153715
Скоростной Верле	4.4656635893	5.2017358280	–	3.4284989854	3.7861826213	4.4701769800	4.2704516008
С перескоками	4.5755111600	5.3256159362	3.4284989854	–	3.7957480494	4.6320376606	4.3514823583
Бимана – Шофилда	4.6260248227	5.4409951064	3.7861826213	3.7957480494	–	4.5982169319	4.4494335063
Предиктор–корректор	4.6189603152	5.5711764325	4.4701769800	4.6320376606	4.5982169319	–	4.7781136640

Для следующего эксперимента количество молекул увеличено до 50. Начальные условия пересозданы при тех же параметрах плотности, массы и дисперсии скоростей.

Таблица 3

50 молекул, 10^{-6}, дисперсия начальных скоростей молекул 6 усл. ед., плотность 5 молекул/усл. ед³., ε = σ = 1, масса каждой молекулы 0,1 усл. ед.

Эталонный метод	Рунге – Кутты 4	Верле	Скоростной Верле	С перескоками	Бимана – Шофилда	Предиктор–корректор	Среднее MSE
Рунге – Кутты 4	–	6.1084328822	3.6532622098	3.7112421236	3.6787085636	4.1723742859	4.2648040130
Верле	6.1084328822	–	5.3969655978	5.3433050948	5.2802530556	6.2756380319	5.6809189325
Скоростной Верле	3.6532622098	5.3969655978	–	2.4553632812	1.8414772796	4.2612499987	3.5216636734
С перескоками	3.7112421236	5.3433050948	2.4553632812	–	2.3943194711	4.1448541042	3.6098168150
Бимана – Шофилда	3.6787085636	5.2802530556	1.8414772796	2.3943194711	–	4.3427835882	3.5075083916
Предиктор–корректор	4.1723742859	6.2756380319	4.2612499987	4.1448541042	4.3427835882	–	4.6393800018

Увеличение числа молекул сопровождается ростом среднеквадратичной ошибки, что обусловлено как усилением численных флуктуаций, так и спецификой генерации начальных скоростей. На следующем этапе исследования будет рассмотрено влияние иных параметров системы. В качестве отправной точки проанализируем случай при ε = 1. Начальные координаты и скорости молекул будут сгенерированы заново.

Таблица 4

30 молекул, 10^{-6}, дисперсия начальных скоростей молекул 6 усл. ед., плотность5 молекул/усл. ед³., ε = σ = 1, масса каждой молекулы 0,1 усл. ед.

Эталонный метод	Рунге – Кутты 4	Верле	Скоростной Верле	С перескоками	Бимана – Шофилда	Предиктор–корректор	Среднее MSE
Рунге – Кутты 4	–	3.1990532090	3.5759952499	3.6211857614	3.7850295816	4.0540716264	3.6470670857
Верле	3.1990532090	–	3.2037773575	3.3550943961	3.3832351822	3.9686682791	3.4219656848
Скоростной Верле	3.5759952499	3.2037773575	–	1.0035557254	1.5586050111	3.4874009495	2.5658668587
С перескоками	3.6211857614	3.3550943961	1.0035557254	–	1.5896298901	3.7825449350	2.6704021416
Бимана – Шофилда	3.7850295816	3.3832351822	1.5586050111	1.5896298901	–	3.4180593449	2.7469118020
Предиктор–корректор	4.0540716264	3.9686682791	3.4874009495	3.7825449350	3.4180593449	–	3.7421490270

Несмотря на сохранение всех параметров системы, замена начальных координат и скоростей привела к заметным отличиям в значениях MSE (табл. 2 и 4).

Для следующего эксперимента увеличен с 1 до 10, при этом все остальные параметры системы сохранены такими же, как в условиях табл. 4.

Таблица 5

30 молекул, 10^{-6}, дисперсия начальных скоростей молекул 6 усл. ед., плотность 5 молекул/усл. ед³., ε = 10, σ = 1, масса каждой молекулы 0,1 усл. ед.

Эталонный метод	Рунге – Кутты 4	Верле	Скоростной Верле	С перескоками	Бимана – Шофилда	Предиктор–корректор	Среднее MSE
Рунге – Кутты 4	–	8.5058983354	5.8754341843	5.8194044050	6.0791595325	5.6840717857	6.3927936486
Верле	8.5058983354	–	8.1433108772	8.3214806736	8.3285875381	8.2290232755	8.3056601400
Скоростной Верле	5.8754341843	8.1433108772	–	5.2302866456	4.9555142900	5.9707435615	6.0350579117
С перескоками	5.8194044050	8.3214806736	5.2302866456	–	5.2033640739	6.0373216102	6.1223714817
Бимана – Шофилда	6.0791595325	8.3285875381	4.9555142900	5.2033640739	–	6.0626609824	6.1258572834
Предиктор–корректор	5.6840717857	8.2290232755	5.9707435615	6.0373216102	6.0626609824	–	6.3967642431

В следующем эксперименте параметр увеличен с 10 до 25 при сохранении остальных параметров системы.

Таблица 6

30 молекул, 10^{-6}, дисперсия начальных скоростей молекул 6 усл. ед., плотность 5 молекул/усл. ед³., ε = 25, σ = 1, масса каждой молекулы 0,1 усл. ед.

Эталонный метод	Рунге – Кутты 4	Верле	Скоростной Верле	С перескоками	Бимана – Шофилда	Предиктор–корректор	Среднее MSE
Рунге – Кутты 4	–	6.9066114255	6.0278915804	5.8972311989	5.9998667658	5.9527658393	6.1568733620
Верле	6.9066114255	–	6.9315803382	6.6211195207	6.7891036494	6.3351772189	6.7167184305
Скоростной Верле	6.0278915804	6.9315803382	–	5.6890279118	5.7247896620	5.8991396284	6.0544858242
С перескоками	5.8972311989	6.6211195207	5.6890279118	–	5.7476889905	6.0675351940	6.0045205632
Бимана – Шофилда	5.9998667658	6.7891036494	5.7247896620	5.7476889905	–	6.0445100948	6.0611918325
Предиктор–корректор	5.9527658393	6.3351772189	5.8991396284	6.0675351940	6.0445100948	–	6.0598255951

Далее исследуется влияние параметра σ. Для этого сгенерированы новые начальные условия.

Таблица 7

30 молекул, 10^{-6}, дисперсия начальных скоростей молекул 6 усл. ед., плотность 5 молекул/усл. ед³., ε = 1, σ = 2, масса каждой молекулы 0,1 усл. ед.

Эталонный метод	Рунге – Кутты 4	Верле	Скоростной Верле	С перескоками	Бимана – Шофилда	Предиктор–корректор	Среднее MSE
Рунге – Кутты 4	–	–	6.7671639325	6.6686417397	–	6.8114397659	6.7490818127
Верле	–	–	–	–	–	–	–
Скоростной Верле	6.7671639325	–	–	6.4335179508	–	6.9103614528	6.7036811120
С перескоками	6.6686417397	–	6.4335179508	–	–	6.5517369846	6.5512988917
Бимана – Шофилда	–	–	–	–	–	–	–
Предиктор–корректор	6.8114397659	–	6.9103614528	6.5517369846	–	–	6.7578460678

Для методов Верле и Бимана – Шофилда наблюдалась потеря численной устойчивости, сопровождаемая выходом молекул за границы расчетной области и возникновением неопределенных значений координат (NaN), что свидетельствует о расходимости интегрирования. Для следующего эксперимента значение параметра σ увеличено с 2 до 3 при сохранении всех остальных параметров системы неизменными.

Таблица 8

30 молекул, 10^{-6}, дисперсия начальных скоростей молекул 6 усл. ед., плотность 5 молекул/усл. ед³., ε = 1, σ = 3, масса каждой молекулы 0,1 усл. ед.

Эталонный метод	Рунге – Кутты 4	Верле	Скоростной Верле	С перескоками	Бимана – Шофилда	Предиктор–корректор	Среднее MSE
Рунге – Кутты 4	–	–	–	6.5101566040	–	6.8672520398	6.6887043219
Верле	–	–	–	–	–	–	–
Скоростной Верле	–	–	–	–	–	–	–
С перескоками	6.5101566040	–	–	–	–	6.8672520398	6.6887043219
Бимана – Шофилда	–	–	–	–	–	–	–
Предиктор–корректор	6.8672520398	–	–	6.9088849049	–	–	6.8880684724

Для методов Верле, скоростного Верле и Бимана – Шофилда наблюдалась потеря численной устойчивости, сопровождаемая выходом молекул за границы расчетной области и возникновением неопределенных значений координат (NaN), что свидетельствует о расходимости интегрирования. На следующем этапе проанализировано влияние массы молекул. Исходные условия были пересозданы для случая $m = 1$.

Таблица 9

30 молекул, 10^{-6}, дисперсия начальных скоростей молекул 6 усл. ед., плотность 5 молекул/усл. ед³., ε = σ = 1, масса каждой молекулы 1 усл. ед.

Эталонный метод	Рунге – Кутты 4	Верле	Скоростной Верле	С перескоками	Бимана – Шофилда	Предиктор–корректор	Среднее MSE
Рунге – Кутты 4	–	6.6578740175	5.9967089301	5.9386020104	6.2436035527	5.5872538426	6.0848084707
Верле	6.6578740175	–	6.6669356028	6.6313928156	6.8513325130	6.7994525972	6.7213975092
Скоростной Верле	5.9967089301	6.6669356028	–	5.1158552613	5.2984983381	5.6601091850	5.7476214635
С перескоками	5.9386020104	6.6313928156	5.1158552613	–	5.1198747228	5.8947621433	5.7400973907
Бимана – Шофилда	6.2436035527	6.8513325130	5.2984983381	5.1198747228	–	5.9829873926	5.8992593038
Предиктор–корректор	5.5872538426	6.7994525972	5.6601091850	5.8947621433	5.9829873926	–	5.9849130321

Для следующего эксперимента масса молекул увеличена с до $m = 15$, начальные координаты и скорости пересозданы.

Таблица 10

30 молекул, 10^{-6}, дисперсия начальных скоростей молекул 6 усл. ед., плотность 5 молекул/усл. ед³., ε = σ = 1, масса каждой молекулы 15 усл. ед.

Эталонный метод	Рунге – Кутты 4	Верле	Скоростной Верле	С перескоками	Бимана – Шофилда	Предиктор–корректор	Среднее MSE
Рунге – Кутты 4	–	2.8030149445	1.4089900628	1.4478930799	1.4102251782	1.9765881149	1.8093422761
Верле	2.8030149445	–	2.4761600045	2.6232408147	2.4936722658	2.8081993666	2.6408574792
Скоростной Верле	1.4089900628	2.4761600045	–	0.1471507998	0.0177859875	1.6880526030	1.1476278915
С перескоками	1.4478930799	2.6232408147	0.1471507998	–	0.1629010689	1.7279904666	1.2218352460
Бимана – Шофилда	1.4102251782	2.4936722658	0.0177859875	0.1629010689	–	1.6696181637	1.1508405328
Предиктор–корректор	1.9765881149	2.8081993666	1.6880526030	1.7279904666	1.6696181637	–	1.9740897430

Результаты и обсуждение. Проведен ряд вычислительных экспериментов для оценки влияния параметров системы на точность алгоритмов. Рассмотрены системы из N = 10, 30 и 50 молекул при различных значениях плотности и параметров потенциала Леннарда-Джонса (ε, σ), а также разные массы молекул.

С увеличением числа молекул наблюдается рост накопленной ошибки интегрирования у всех методов из-за усиления численных погрешностей. При N = 10 все интеграторы демонстрируют относительно низкую MSE, однако уже при N = 30 наблюдается ее существенный рост. Методы с перескоками (leapfrog), скоростной Верле и Бимана – Шофилда показывают наименьшую MSE при любом N, тогда как стандартный метод Верле дает значительно большие ошибки. Это свидетельствует о лучшей стабильности модифицированных алгоритмов по сравнению с классическим методом Верле. Метод Рунге – Кутты 4-го порядка остается численно устойчивым во всех экспериментах, но его относительное преимущество по точности уменьшается при росте N.

При увеличении глубины потенциальной ямы ε среднеквадратичная ошибка также возрастает для всех методов. Особенно заметен рост MSE у алгоритмов Верле и предиктор-корректора, тогда как методы с перескоками (leapfrog) и скоростной Верле сохраняют относительно низкие ошибки даже при больших ε. Метод Рунге – Кутты 4-го порядка остается стабильным при увеличении ε, однако начинает уступать модифицированным методам по точности на сильных взаимодействиях.

При увеличении характерного расстояния σ система становится численно более жесткой, что приводит к неустойчивости некоторых методов. Так, стандартные схемы Верле, скоростной метод Верле и метод Бимана – Шофилда при больших σ приводят к расходимости расчета (возникают NaN-значения), тогда как методы с перескоками (leapfrog) и предиктор-корректор остаются работоспособными. Это говорит о более высокой устойчивости этих алгоритмов при экстремальных значениях параметров потенциала.

Увеличение массы частиц от 1 до 15 приводит к уменьшению MSE у всех методов за счет замедления динамики системы. Особенно ярко это проявляется для скоростного метода Верле и метода Бимана – Шофилда, у которых ошибки значительно падают при большей массе. При высоких массах преимущество в точности сохраняют методы скоростной Верле, с перескоками (leapfrog) и Бимана – Шофилда, демонстрируя наименьшие ошибки.

Таким образом, наиболее точными и устойчивыми методами среди рассмотренных оказались скоростной Верле, метод с перескоками (leapfrog) и метод Бимана – Шофилда, тогда как классический алгоритм Верле проявил наибольшую чувствительность и численную неустойчивость к изменению параметров системы. Метод Рунге – Кутты 4-го порядка показал надежную устойчивость при всех тестах, однако уступает модифицированным методам по точности в долгосрочных симуляциях.

Выводы. Зависимость от числа частиц. При увеличении числа молекул N наблюдается устойчивый рост накопленной ошибки интегрирования у всех методов. Это связано с усилением численных погрешностей и влиянием случайных начальных условий. Методы с перескоками (leapfrog), скоростной Верле и Бимана – Шофилда демонстрируют наименьшую MSE при любом N, тогда как стандартный алгоритм Верле оказывается наиболее чувствительным к росту размера системы. Метод Рунге – Кутты 4-го порядка остается численно устойчивым, но его относительное преимущество по точности уменьшается при больших N.

Влияние глубины потенциальной ямы ε. С возрастанием ε среднеквадратичная ошибка увеличивается у всех методов, что особенно заметно у алгоритмов Верле и предиктор-корректора. Наиболее низкую MSE вновь демонстрируют методы с перескоками (leapfrog) и скоростной Верле, тогда как метод Рунге – Кутты 4-го порядка, хоть и устойчив, уступает им по точности при сильном взаимодействии.

Влияние характерного расстояния σ. При увеличении σ система становится численно жесткой, что приводит к расходимости некоторых алгоритмов. Методы Верле, скоростной Верле и Бимана – Шофилда дали сбой (возникали NaN-значения), что свидетельствует о потере устойчивости. При этом методы с перескоками (leapfrog) и предиктор-корректор сохранили работоспособность, оставаясь стабильными при больших σ.

Влияние массы молекул m. Рост массы частиц приводит к общему снижению MSE у всех алгоритмов за счет замедления динамики системы. Наибольшее уменьшение ошибок наблюдается у скоростного метода Верле и метода Бимана – Шофилда, что дополнительно подтверждает их эффективность. Преимущество по точности при больших m сохраняют методы скоростной Верле, с перескоками (leapfrog) и Бимана – Шофилда.

В целом методы скоростной Верле, с перескоками (leapfrog) и Бимана – Шофилда признаны наиболее точными и устойчивыми для широкого диапазона условий моделирования. Классический алгоритм Верле продемонстрировал наибольшую чувствительность к изменениям параметров и численную неустойчивость. Метод Рунге – Кутты 4-го порядка оказался устойчивым во всех испытаниях, однако его точность может уступать модифицированным алгоритмам при длительном интегрировании.

Список литературы

1. *Аксенова Е. В., Кшевецкий М. С.* Вычислительные методы исследования молекулярной динамики : учеб.-метод. пособие. СПб. : СПбГУ, 2009. 50 с.
2. *Калиткин Н. Н.* Численные методы : учеб. для вузов. 3-е изд., испр. и доп. М. : Наука, 2011. 512 с.
3. *Селезнев А. А.* Основы метода молекулярной динамики : учеб.-метод. пособие. Саров : СарФТИ, 2017. 72 с.
4. *Кураев А. А., Трубецков Д. И.* Методы нелинейной динамики и теории хаоса в задачах электроники сверхвысоких частот. Т. 1: Стационарные процессы. М. : Физматлит, 2009. 288 с.
5. *Гулд Дж., Тобочник В.* Вычислительная физика : учеб. М. : Мир, 1989. 592 с.
6. *Хеерман Д. В.* Методы компьютерного эксперимента в теоретической физике / пер. с англ. ; под ред. С. А. Ахманова. М. : Наука, 1990. 432 с.
7. *Bishop C. M.* Pattern Recognition and Machine Learning. N. Y. : Springer, 2006. 738 p.

Comparison of computational methods of molecular dynamics

Chuprakov Pavel Grigorievich[1], Kabanov Egor Andreevich[2], Gavrilenkov Alexey Evgenievich[3]

[1]PhD in Biological Sciences, associate professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: email@gmail.com

[2]student in the field of Applied Mathematics and Computer Science, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: sergeyrootuser@gmail.com

[3]student in the field of Applied Mathematics and Computer Science, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: Alekceygavr01082004@gmail.com

Abstract. The relevance of the research is determined by the widespread demand for molecular dynamics for modeling processes at the atomic level, where the choice of a numerical integration method significantly affects the accuracy and stability of the results. The purpose of the study is a comparative analysis of various numerical integration methods in molecular dynamics implemented in C++ with a single interface. A single software platform has been developed for generating initial conditions, integrating the system using the same methods, and evaluating accuracy by the root-mean-square error. The work includes a theoretical analysis of algorithms and their numerical verification on a model problem with the potential Lennard-Jones. The method Runge-Kutta 4th order [2], the classical Verlet algorithm [3], the high-speed Verlet [3], the leapfrog method [4], the Beeman-Schofield method [5] and the predictor corrector [6] was considered for the study. The main results demonstrate that the Werle modifications and the Beeman-Schofiltz method provide the lowest mean square error (MSE [7]) and high numerical stability for various modeling parameters, while the standard Wehrle algorithm is most sensitive to error accumulation. The data obtained can be used to optimize computational experiments in problems of solid state physics, chemistry, materials science, and biomolecular research.

Keywords: molecular dynamics; numerical integration methods; algorithm stability; root-mean-square error; simulation of atomic systems; computational experiment.

References

1. *Aksenova E. V., Kshevetsky M. S. Vychislitel'nye metody issledovaniya molekulyarnoj dinamiki : ucheb.-metod. posobie* [Computational Methods for the Study of Molecular Dynamics : educational and methodical manual]. SPb., St. Petersburg State University. 2009. 50 p.

2. *Kalitkin N. N. Chislennye metody : ucheb. dlya vuzov* [Numerical Methods : textbook for universities]. 3rd ed., revised and expanded. M., Nauka (Science). 2011. 512 p.

3. *Seleznev A. A. Osnovy metoda molekulyarnoj dinamiki : ucheb.-metod. posobie* [Fundamentals of the Molecular Dynamics Method : educational and methodical manual]. Sarov, SarFTI. 2017. 72 p.

4. *Kuraev A. A., Trubetskov D. I. Metody nelinejnoj dinamiki i teorii haosa v zadachah elektroniki sverhvysokih chastot* [Methods of Nonlinear Dynamics and Chaos Theory in Microwave Electronics Problems]. Vol. 1: Stationary Processes. M., Fizmatlit. 2009. 288 p.

5. *Gould J., Tobochnik V. Vychislitel'naya fizika : ucheb* [Computational Physics : textbook]. M., Mir (World). 1989. 592 p.

6. *Heermann D. W. Metody komp'yuternogo eksperimenta v teoreticheskoj fizike* [Computer Simulation Methods in Theoretical Physics] / transl. from English; ed. by S. A. Akhmanov. M., Nauka (Science). 1990. 432 p.

7. *Bishop C. M.* Pattern Recognition and Machine Learning. N. Y. : Springer, 2006. 738 p.

Поступила в редакцию: 15.07.2025
Принята к публикации: 30.09.2025

УДК 355.233.231.1:378.016 EDN: ILTYZQ

О проведении междисциплинарного квеста в контексте патриотического воспитания студентов младших курсов вуза

Бабенко Марина Владимировна[1], Бояринцева Наталья Александровна[2], Подлевских Марина Николаевна[3], Разова Елена Владимировна[4], Соколова Анна Николаевна[5], Шалагинова Надежда Владимировна[6]

[1]кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0009-0002-8426-1816. E-mail: marinka_ov@mail.ru

[2]кандидат педагогических наук, доцент, декан факультета компьютерных и физико-математических наук, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-9709-1804. E-mail: na_bushmeleva@vyatsu.ru

[3]кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: podlevskih@vyatsu.ru

[4]кандидат педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0001-5557-5432. E-mail: ev_razova@vyatsu.ru

[5]кандидат педагогических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0002-7619-0627. E-mail: junell@inbox.ru

[6]кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0001-8099-1198. E-mail: korshunnv@mail.ru

Аннотация. В статье представлен опыт организации и проведения междисциплинарного квеста для студентов I–II курсов факультета компьютерных и физико-математических наук, приуроченного к 80-летию Победы в Великой Отечественной войне. Основное внимание уделено содержанию заданий по математике и программированию. Приводятся примеры сюжетных задач военно-патриотической тематики по математике с ответами, а также условия программистских задач с историческим контекстом, адаптированные для платформы «Яндекс.Контест». Предложенные материалы могут быть использованы в учебно-воспитательной работе как со студентами младших курсов, так и со старшеклассниками.

Ключевые слова: обучение математике, обучение программированию, патриотическое воспитание, сюжетные задачи, исторический контекст, квест.

Патриотическое воспитание представляет собой одно из приоритетных направлений работы со студентами младших курсов. Данный тезис находит подтверждение в работе Е. А. Скобиной и Е. В. Севостьяновой, которые отмечают, что «поиск и актуализация форм и методов осуществления патриотического воспитания в вузе должны быть связаны как с общими нормативными документами, определяющими содержание гражданско-патриотического воспитания, так и сложившимися педагогическими традициями, с учетом специфики вуза и возрастных особенностей студенчества» [6]. В русле данного подхода в статье описывается опыт организации и проведения междисциплинарного квеста с военно-патриотическим содержанием для студентов, обучающихся по информационно-технологическим, техническим и педагогическим направлениям подготовки.

В конце 2024/2025 учебного года на факультете компьютерных и физико-математических наук был проведен традиционный междисциплинарный квест, включающий станции по математике, информатике и физике. Тематическая направленность заданий была посвящена 80-летию Победы в Великой Отечественной войне. Выбор военно-исторической тематики обусловлен не только юбилейной датой, но и данными исследований, согласно которым история и традиции выступают важным ресурсом для формирования патриотических чувств у студенческой молодежи [3].

Цель мероприятия – формирование у студентов патриотического сознания, гражданской ответственности, а также углубление междисциплинарных знаний в области математики, информатики и физики. Достижение этой цели реализуется через вовлечение студентов в интеллектуально-творческую деятельность, посвященную 80-летию Победы в Великой Отечественной войне.

Образовательные задачи:

1. Способствовать развитию междисциплинарного мышления через решение задач, требующих интеграции знаний из разных предметных областей.

2. Совершенствовать навыки командной работы, логического анализа, критического мышления, а также креативного подхода к решению задач.

3. Повысить познавательную активность студентов за счет применения игровых и соревновательных форматов.

Воспитательные задачи:

1. Сформировать патриотические ценности и уважение к историческому наследию России на основе материалов, посвященных Великой Отечественной войне.

2. Воспитывать гражданскую ответственность и социальную активность у студентов.

3. Развивать чувство командного духа, взаимопомощи и уважения к соперникам в конкурсной среде.

4. Популяризация научного знания через демонстрацию исторических достижений советских ученых и инженеров в годы войны.

Формат проведения – квест по станциям. Команды последовательно посещают девять станций, на которых выполняют задания на время. Данный динамичный формат позволяет органично сочетать обучение, патриотическое воспитание, развивать командный дух, а также повышает интерес к физико-математическим наукам за счет их интеграции в исторический контекст.

Длительность – четыре часа.

Для участия в квесте командам из 3–5 человек было необходимо заранее зарегистрироваться и выбрать название (рис. 1).

Рис. 1. Объявление о проведении квеста

В 2025 году в квесте приняли участие 14 команд. Помимо студентов факультета компьютерных и физико-математических наук, к мероприятию присоединились студенты электротехнического факультета и педагогического института ВятГУ. Таким образом, география участников охватила направления подготовки «Прикладная математика и информатика», «Математика и компьютерные науки», «Фундаментальная информатика и информационные технологии», «Педагогическое образование», «Электроэнергетика и электротехника» и «Мехатроника и робототехника».

В начале квеста организаторы разъяснили участникам правила и выдали маршрутные листы с индивидуальной последовательностью прохождения станций и схемой их расположения в университетском корпусе (рис. 2). Каждую команду сопровождал куратор из числа преподавателей или студентов старших курсов. Задание для команд состояло из двух частей: 1) расположить знаковые сражения Великой Отечественной войны в хронологическом порядке; 2) из слов-подсказок, полученных на станциях, составить фразу, принадлежащую одной из важных из исторических личностей, и определить автора высказывания (рис. 3). Члены команд могли самостоятельно распределять обязанности как при выполнении основных заданий, так и на различных станциях.

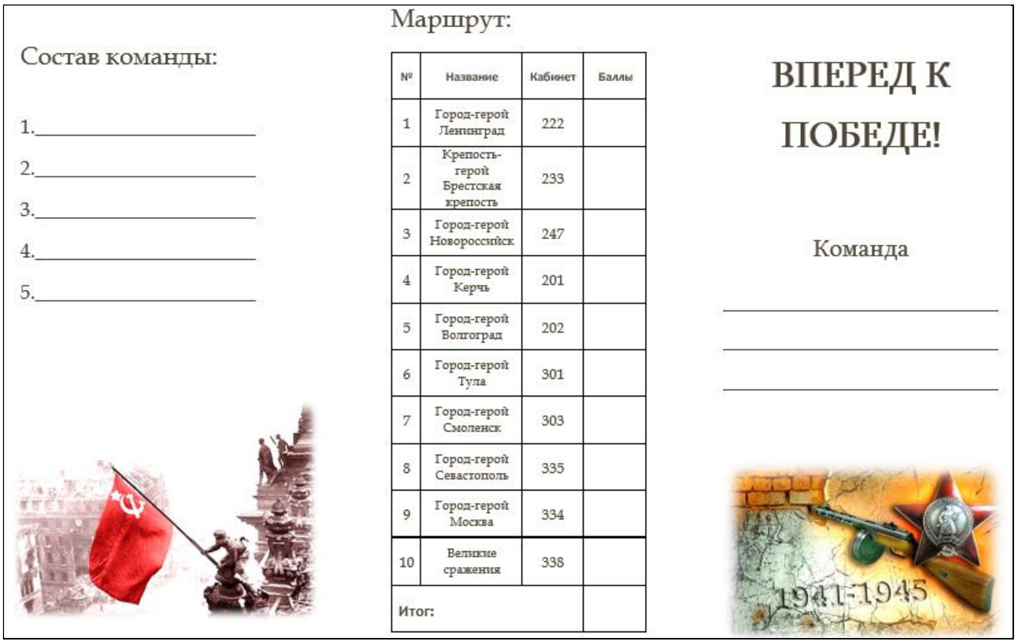

Рис. 2. Вид маршрутного листа

Поскольку число команд превышало количество станций, маршрутные листы были составлены таким образом, чтобы на каждой станции одновременно находилось не более двух команд. Это ограничение было введено с учетом количества компьютеров в аудиториях и для создания комфортных условий работы участников. На прохождение одной станции отводилось 15 минут.

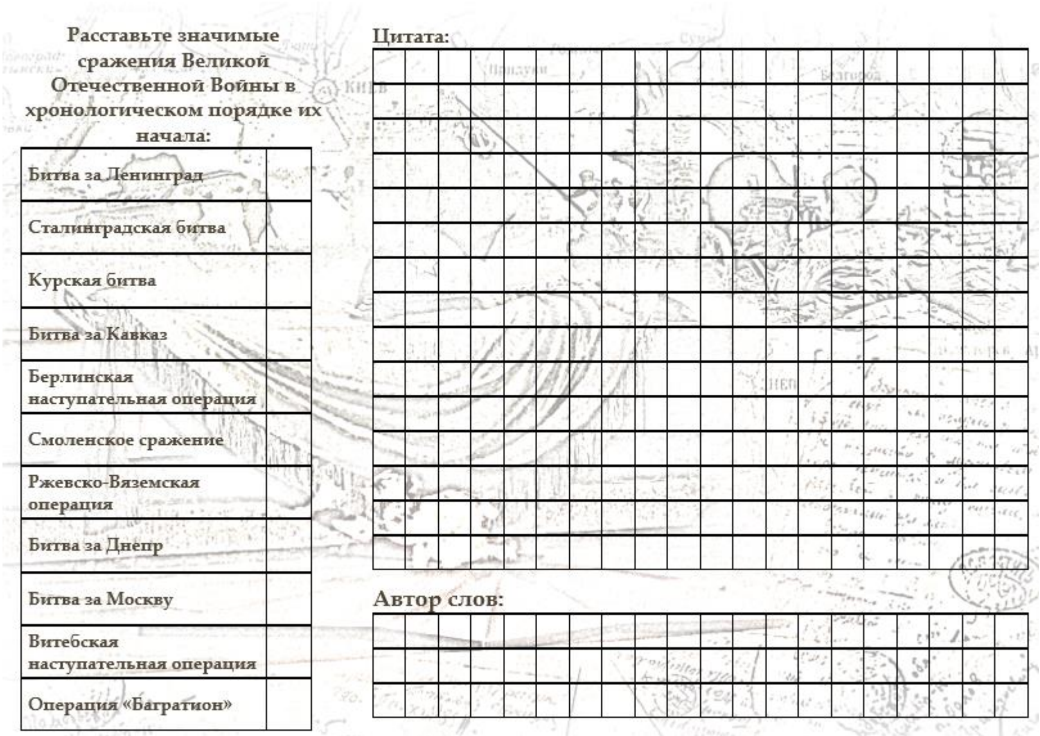

Рис. 3. Задания квеста

На каждой станции, названной в честь городов-героев, команды решали задачи, за которые начислялись баллы. Количество баллов определяло количество полученных подсказок, доступных для финального этапа. Одним из заданий было ответить на пять вопросов о соответствующем городе-герое. Разрешалось пользоваться поисковыми системами, однако засчитывался только полный и точный ответ. Например, на вопрос «Когда Керчи было присвоено звание "Город-герой"?» необходимо было указать полную дату (день, месяц и год). Ответ, содержащий только месяц и год, не засчитывался.

Рассмотрим более подробно задачи с некоторых станций: «Математика», «Комбинаторика и вероятность» и «Программирование».

На станции «Математика» задачи имели различную степень сложности, в зависимости от которой оценивались в 1–3 балла.

Задачи на 1 балл

1.1. 22 ноября 1942 г. стала действовать Дорога жизни: на автотранспорте по Ладожскому озеру из Кобоны до Кокорева, далее до Ленинграда по железной дороге. От Кобоны до Кокорева по карте 7 см. Масштаб карты 1:500000. Определите фактическое расстояние между данными населенными пунктами.

Ответ: 35 км.

1.2. Против танковой дивизии «Адольф Гитлер» были выдвинуты две армии, которые должны встретиться недалеко от Курска. Армии находились друг от друга на расстоянии 240 км. Скорость движения одной армии 4 км/ч. Найти скорость движения второй армии, если известно, что через 2 дня расстояние между ними было 40 км. Учесть, что армии двигались по 10 ч в сутки навстречу друг другу практически по прямой [5].

Ответ: 6 км/ч.

1.3. Максимальная скорость танка Т-34 55 км/ч, а скорость фашистского танка того же класса 40 км/ч. Успеют ли наши танки захватить переправу через Северный Донец, если по данным разведки фашистские танки находятся на расстоянии 20 км, а наши – 24 км? При этом нужно учесть, что на пути советских танков есть труднопроходимый участок длиной 4 км, который можно преодолеть только со скоростью 30 км/ч [2].

Ответ: поскольку время движения наших танков до переправы меньше, чем вражеских, успеют.

1.4. После боя требуется восстановить цепь из 15 колец, которая оказалась разбита на 5 звеньев по 3 кольца в каждом. Какое наименьшее число колец нужно расковать и сковать, чтобы соединить эти звенья в одну цепь?

Ответ: 3.

Пример: достаточно расковать 3 кольца из одного звена. Оставшиеся 4 звена соединяем тремя раскованными кольцами.

Задачи на 2 балла

2.1. Какое максимальное число экипажей танков Т-26 и Т-34 можно укомплектовать воинским составом из 100 человек (рис. 4)?

Тип	Т-26, легкий танк	Т-34, средний танк
		
Боевая масса, т	10,25	30,9
Лобовая броня,	15	45
Максимальная скорость, км/ч	30	54
Запас хода км	200	300
Экипаж чел.	3	4

Рис. 4. Задача про танки

Ответ: 33.

2.2. Необходимо подготовить площадку в виде прямоугольного треугольника площадью 1 кв. ед. Уже определена одна из границ площадки длиной 4 ед. Сколько существует вариантов определения третьей точки, определяющей две другие границы этой площадки?

Ответ: 8.

Задачи на 3 балла

3.1. Звания героев СССР в годы Великой Отечественной Войны были удостоены 677 воинов разных видов войск и различных воинских званий. Известно, что для героев СССР доля младших офицеров в ВВС (военно-воздушные силы) больше, чем доля младших офицеров среди всех героев СССР. Что больше: доля героев из ВВС среди младших офицеров всех родов войск или доля героев из ВВС среди всех героев СССР?

Ответ: для героев СССР доля младших офицеров ВВС среди младших офицеров всех родов войск больше, чем доля героев из ВВС среди всех героев СССР.

3.2. Высоты данных скульптур (рис. 5) выражаются целыми числами в метрах, для которых выполняются следующие соотношения: их НОД равен 5, НОК – 765, а сумма – 130. Найдите высоты этих скульптур в метрах.

Рис. 5. Сравнение высоты статуй

Ответ: 85 м – высота скульптуры «Родина-мать зовёт!», 45 м – высота статуи Свободы.

3.3. Два населенных пункта А и В расположены по разные стороны от реки шириной 200 м, берега которой параллельны. Длины дорог от каждого пункта до своего берега равны 1,3 км и 1,7 км соответственно, а расстояние по реке между пунктами – 4 км (рис. 6). Какой будет длина кратчайшего пути между населенными пунктами А и В, если построить перпендикулярно берегу понтонную переправу через реку?

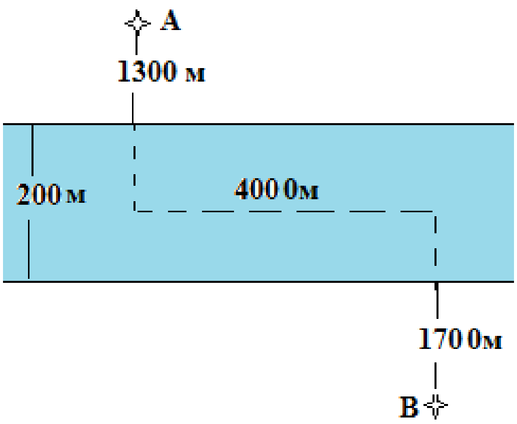

Рис. 6. Путь между двумя населенными пунктами

Ответ: 5200 м.

Следующие задачи предлагались уже на другой станции «Комбинаторика и вероятность».

1. Сколько других четырехзначных чисел можно получить из цифр числа 1945?

Ответ: 23.

2. Для Парада Победы в Москве в мае 1945 г. был создан сводный полк, включающий в себя шесть рот пехоты, одну роту артиллеристов, одну роту танкистов, одну роту летчиков и одну роту сводную (кавалеристы, саперы, связисты).

Сколькими способами можно выбрать роты для марша, если доступно восемь рот пехоты, три танковые роты, две роты летчиков, одна рота артиллеристов и одна сводная?

Ответ: 168.

3. В условиях предыдущей задачи какова вероятность для рядового Смирнова из пехотной роты принять участие в параде Победы, если в одной роте 100 человек?

Ответ: 0,75.

4. На тактической карте отмечено 8 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько можно построить треугольников с вершинами в этих точках?

Ответ: 56.

5. Два стрелка производят по одному выстрелу по мишени. Вероятности попадания в цель для первого и второго стрелков равны 0,8 и 0,6 соответственно. Какова вероятность того, что в цель попадет хотя бы один стрелок? [1].

Ответ: 0,92.

6. Маршал Родион Малиновский составлял на досуге шахматные задачи, участвовал в конкурсах и играл на уровне гроссмейстера. Представим себе шахматный турнир между 15 маршалами и генералами Советского Союза, в котором каждый из них сыграл только одну партию с каждым из остальных. Сколько всего партий было бы сыграно в этом турнире?

Ответ: 105.

7. Боевые снаряды в равном количестве хранятся на двух складах. К концу дня один из складов может опустеть с равной вероятностью 0,4, а вероятность того, что опустеют оба склада, равна 0,12. Какова вероятность того, что к концу дня снаряды останутся на обоих складах?

Ответ: 0,32.

8. Сколькими способами можно прочитать слово «победа», двигаясь вправо или вниз?

П О Б Е Д А
О Б Е Д А
Б Е Д А
Е Д А
Д А
А

Ответ: $2^5 = 32$.

9. В День Победы семья Ивановых пришла поздравить дедушку. В гости пришли сыновья и внуки. За столом сидят Сидор Петрович, Петр Сидорович, Иван Сидорович, Сидор Олегович и Иван Петрович. Как зовут внуков Ивановых?

Ответ: Иван и Сидор.

10. Отряд партизан для конспирации решил присвоить участникам трехзначные числовые коды, а, чтобы отличить «своих», число должно иметь четную сумму цифр. Хватит ли таких кодов участникам, если к партизанскому отряду примкнуло уже 250 человек?

Ответ: да.

На станции «Программирование» студентам предлагалось решить на языках программирования C++, Python или Pascal (на выбор) ряд текстовых задач, приведенных ниже. Каждая задача имеет название, связанное с ее сюжетом. Поскольку автоматическая проверка решений проводится на платформе Yandex.Contest, задачи сформулированы с учетом ее требований: дано описание условия задачи, формат входных данных и формат выходных данных программ. Для некоторых задач приводятся примеры входных данных и соответствующие ответы.

1. Помогите партизанам.

Отряд советских партизан направляется для выполнения задания в горной местности. Известно, что на само задание потребуется a часов. Отряд добирался до места b часов и еще c часов возвращался назад, обходя засады противника. Определите, сколько времени потребовалось партизанам для выполнения задания. Уложились ли они в сутки?

Единственная строка содержит три целых числа: a, b, c ($0 \leq a, b, c \leq 10$).

В первой строке выведите одно число – время, затраченное на задание, во второй – YES, если отряду удалось успеть за одни сутки, и NO – в противном случае.

2. Сигнал от командования.

Генеральный штаб Красной армии должен сообщить своему подразделению дату начала наступления (в текущем году). Канал связи является ненадежным, чтобы запутать противника, связист вместо даты в виде день d и месяц m передает разность $d - m$ и разность их квадратов $d^2 - m^2$.

Связной роты знает этот алгоритм. Помогите ему расшифровать сигнал от командования и узнать дату начала наступления.

В первой строке записана разность чисел $d - m$, а во второй строке – разность квадратов чисел $d^2 - m^2$. Гарантируется, что $1 \le d \le 31$ и $1 \le m \le 12$.

В одной строке выведите два числа d и m (гарантируется, что числа существуют).

3. Сражение у Калача-на-Дону.

С 23 июля по 11 августа 1942 г. состоялось сражение у Калача-на-Дону. В результате двухнедельных боев в большой излучине Дона между 6-й армией вермахта и силами советского Сталинградского фронта части вермахта нанесли поражение 62-й и 64-й армиям РККА, заняли Калач-на-Дону, переправились через Дон и создали плацдарм на восточном берегу реки, что дало возможность начать наступление на Сталинград.

Помогите командованию РККА оценить численность солдат, уцелевших в этом бою.

В полученной шифровке в первой строке указано натуральное число – количество танковых батальонов, отправленных в бой, а затем в каждой i-й строке записано число p_i ($0 \le p_i \le 100$) – вероятность (в процентах) того, что i-й батальон уцелел. Танковый батальон состоит из 135 человек.

Выведите одно число – количество солдат, уцелевших в сражении (округлить до целого числа).

Пример:

4
50
20
30
15

Ответ: 155.

4. Ночные ведьмы.

46-й гвардейский ночной бомбардировочный авиационный полк, возглавляемый Евдокией Бершанской, наводил леденящий ужас на противника. Бесстрашные советские бомбардировщицы, самолеты которых не могли обнаружить немецкие радары из-за низкой высоты полета, появлялись в небе под покровом ночи, сбрасывали бомбы и вновь исчезали во мраке.

Одна из летчиц за ночь совершила n вылетов. На каждом вылете i-я бомба была сброшена в точку с координатами (x_i; y_i), а цель имеет координаты (xc_i; yc_i) и радиус R_i. Цель считается пораженной, если $R_i - d_i < 0{,}5$ м, где d_i – расстояние между центром цели и точкой попадания снаряда.

Найдите процент поражения целей этой летчицей.

Первая строка содержит натуральное число n – количество вылетов. В следующих n строках через пробел записаны координаты удара, координаты цели и ее радиус.

Выведите число процентов попадания в цель, округленное до целых.

Пример входных данных:

3
4 5 3 5 2
7 1 6 2 3
0 0 2 2 1

Ответ: 75.

В качестве подсказок на станциях участники получали отдельные слова. Из этих слов нужно было составить фразу и определить ее автора. В маршрутных листах было зашифровано высказывание маршала Советского Союза Г. К. Жукова: «Время не имеет власти над величием всего, что мы пережили в войну, а народ, переживший однажды большие испытания, будет и впредь черпать силы в этой победе». Следует отметить, что всем командам удалось выполнить данное задание квеста.

Методическая ценность проведенного междисциплинарного квеста заключается в интеграции дисциплин (объединение математики, информатики, физики и истории) в рамках единого мероприятия, использовании нестандартной игровой формы для повышения мотивации и вовлеченности студентов в образовательный процесс, укреплении связи с историей Великой Отечественной войны и воспитании уважения к прошлому.

После прохождения станций для участников квеста было организовано студенческое шоу физического эксперимента. В это время жюри подводило итоги. Команды, набравшие наибольшее количество баллов на станциях и правильно выполнившие основное задание квеста, были награждены дипломами I–III степеней и сладкими призами.

По окончании мероприятия был проведен опрос участников, показавший высокую степень их удовлетворенности как организацией, так и содержанием квеста. Были получены высокие оценки и только положительные отзывы. Многие студенты выразили заинтересованность в участии в подобных мероприятиях в будущем.

В работе [4] рекомендованы разные формы патриотической работы: проведение поисковых экспедиций (поездки на места сражений); создание и ведение интернет-ресурсов. Безусловно, эти мероприятия эффективны, но они, как правило, не связаны с учебным процессом и профессиональной спецификой подготовки студентов.

В отличие от них, представленный междисциплинарный квест является удачным примером органичного сочетания образовательных и воспитательных задач в рамках учебной деятельности. Предложенный формат может быть адаптирован для других вузов и школ. Поскольку использованные задачи не требуют узкоспециальных знаний, они могут быть предложены не только студентам младших курсов, но и старшеклассникам.

Таким образом, квест, интегрирующий знания из профессиональных областей, позволяет в игровой и интерактивной форме воспитывать в молодежи чувство патриотизма, уважения к истории и культуре своей страны, а также развивать осознание своей роли в ее будущем развитии.

Список литературы

1. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. для вузов. 12-е изд. М. : Юрайт, 2020. 479 с.
2. Задачи для 5–9 класса, посвящённые Великой Отечественной войне // Инфоурок. URL: https://infourok.ru/zadachi-dlya-5-9-klassa-posvyashennye-velikoj-otechestvennoj-vojne-4960023.html (дата обращения: 07.07.2025).
3. *Корж Н. В.* Основные направления формирования патриотического сознания студенческой молодежи: региональный аспект // Власть. 2021. № 1. С. 123–130.
4. *Куликов С. П., Новиков С. В.* Особенности патриотического воспитания студентов в отечественных вузах // Московский экономический журнал. 2019. № 11. С. 779–787.
5. Математика в годы войны // Копилка уроков : сайт для учителей. URL: https://kopilkaurokov.ru/matematika/presentacii/matiematika-v-gody-voiny (дата обращения: 16.07.2025).
6. *Скобина Е. А., Севостьянова Е. В.* Опыт патриотического воспитания студентов вуза: структурные компоненты и содержательное наполнение // Педагогика и просвещение. 2018. № 4. С. 131–140. DOI: 10.7256/2454-0676.2018.4.27676.
7. *Фоминых С. О.* К вопросу организации деятельности по гражданско-патриотическому воспитанию студентов // Образовательные ресурсы и технологии. 2022. № 2 (39). С. 36–42. DOI: 10.21777/2500-2112-2022-2-36-42.

On carrying out an interdisciplinary quest in the context of patriotic education of junior students of the university

Babenko Marina Vladimirovna[1], Boyarintseva Natalia Alexandrovna[2], Podlevskikh Marina Nikolaevna[3], Razova Elena Vladimirovna[4], Sokolova Anna Nikolaevna[5], Shalaginova Nadezhda Vladimirovna[6]

[1]PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0009-0002-8426-1816. E-mail: marinka_ov@mail.ru

[2]PhD in Pedagogical Sciences, associate professor, dean of the Faculty of Computer and Physical-Mathematical Sciences, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-9709-1804. E-mail: na_bushmeleva@vyatsu.ru

[3]PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor. associate professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: podlevskih@vyatsu.ru

[4]PhD in Pedagogical Sciences, associate professor, Head of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0001-5557-5432. E-mail: ev_razova@vyatsu.ru

[5]PhD in Pedagogical Sciences, associate professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0002-7619-0627. E-mail: junell@inbox.ru

[6]PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0001-8099-1198. E-mail: korshunnv@mail.ru

Abstract. The article presents the experience of organizing and conducting an interdisciplinary quest for first- and second-year students of the Faculty of Computer, Physics, and Mathematics, dedicated to the 80th anniversary of Victory in the Great Patriotic War. The focus is on the content of the assignments in mathematics and programming. Examples of military-patriotic themed story-based mathematics problems with answers are provided, as well as programming problem statements with historical context, adapted for the Yandex.Contest platform. The proposed materials can be used in educational work with both junior and senior students.

Keywords: mathematics education, programming education, patriotic education, story-based problems, historical context, quest.

References

1. *Gmurman V. Ye. Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika : uchebnik dlya vuzov* [Probability Theory and Mathematical Statistics: Textbook for Universities]. 12-th ed. M., Yurayt. 2020. 479 p.

2. *Zadachi dlya 5–9 klassov, posvyashchonnyye Velikoy Otechestvennoy Voyne* [Problems for grades 5–9 dedicated to the Great Patriotic War] // Infourok. Available at: https://infourok.ru/zadachi-dlya-5-9-klassa-posvyashennye-velikoj-otechestvennoj-vojne-4960023.html (date accessed: 07.07.2025).

3. *Korzh N. V. Osnovnye napravleniya formirovaniya patrioticheskogo soznaniya studencheskoj molodezhi: regional'nyj aspekt* [The main directions of the formation of patriotic consciousness of student youth: the regional aspect] // *Vlast'* – Power. 2021. No 1. Pp. 123–130.

4. *Kulikov S. P., Novikov S. V. Osobennosti patrioticheskogo vospitaniya studentov v otechestvennykh vuzakh* [Features of patriotic education of students in domestic universities] // *Moskovskiy ekonomicheskiy zhurnal* – Moscow Economic Journal. 2019. No. 11. Pp. 779–787.

5. *Matematika v gody voyny* [Mathematics during the war] // *Kopilka urokov – sayt dlya uchiteley* – Piggy bank of lessons: a website for teachers. Available at: https://kopilkaurokov.ru/matematika/presentacii/matiematika-v-gody-voiny (date accessed: 16.07.2025).

6. *Skobina E. A., Sevost'yanova E. V. Opyt patrioticheskogo vospitaniya studentov vuza: strukturnye komponenty i soderzhatel'noe napolnenie* [Experience of patriotic education of university students: structural components and content] // *Pedagogika i prosveschenie* – Pedagogy and education. 2018. No. 4. Pp. 131–140. DOI: 10.7256/2454-0676.2018.4.27676.

7. *Fominykh S. O. K voprosu organizatsii deyatel'nosti po grazhdansko-patrioticheskomu vospitaniyu studentov* [On the issue of organizing activities for the civic-patriotic education of students] // *Obrazovatel'nyye resursy i tekhnologii* – Educational resources and technologies. 2022. No. 2 (39). Pp. 36–42. DOI: 10.21777/2500-2112-2022-2-36-42.

Поступила в редакцию: 23.09.2025
Принята к публикации: 01.10.2025

УДК 372.851 EDN: OUXRCL

Динамические чертежи в геометрических задачах на построение

Елфимова Александра Александровна[1], Тимшина Лариса Вячеславовна[2]

[1]магистрант кафедры прикладной математики и информатики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: alexandra.danil2017@yandex.ru

[2]старший преподаватель кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0003-3279-8259. E-mail: larisatimshina@rambler.ru

Аннотация. Одно из наиболее перспективных направлений в технологиях обучения математике – внедрение и развитие интерактивных геометрических сред и, как следствие, выявление эффективных путей их использования в образовательном процессе. В статье предлагается набор интерактивных чертежей для работы с геометрическими задачами. В качестве задач выбраны задачи на построение для 8-го класса повышенного уровня сложности.

Ключевые слова: динамические чертежи, геометрические задачи на построение, GeoGebra.

В условиях цифровизации образования высокую оценку заслужили программные среды, позволяющие создавать динамические чертежи, т. е. компьютерные геометрические чертежи-модели, исходные данные которых можно варьировать с сохранением всего алгоритма построения, просматривать их и работать с ними [7].

Вопросы разработки и использования динамических чертежей находятся на стыке геометрии, компьютерных наук, дидактики и инженерного проектирования. Считается, что теоретические и практические основы динамической геометрии заложили Жан-Мари Лаборд (Jean-Marie Laborde) во Франции и Николас Джекив (Nicholas Jackiw) в США. Их программы – соответственно Cabri и The Geometer's Sketchpad (GSP) – обеспечили возможность интерактивного изучения геометрии через манипуляцию объектами. В настоящее время в школьном обучении наиболее часто для создания интерактивных моделей применяются такие специализированные программы и онлайн-сервисы, как GeoGebra, «Живая геометрия», «1С: Математический конструктор» [13–15].

Остановимся отдельно на GeoGebra. Это свободно распространяемая среда, которая дает возможность создания новых инструментов, органически сочетается с интерактивной доской и существенно расширяет диапазон ее применения. Подробно с возможностями GeoGebra и опытом применения ее в учебном процессе можно ознакомиться в публикациях [5, 6, 12].

К преимуществам применения интерактивных моделей в обучении современные исследователи относят:

– Скорость применения. Обучение с применением интерактивных моделей позволяет быстрее и эффективнее научить тем или иным практическим и теоретическим навыкам.

– Актуальность. Технологии, в том числе и образовательные, в современном мире развиваются и меняются очень быстро. Поэтому учащимся и учителям, использующим интерактивные модели, удастся достойно соответствовать реальным требованиям обучения и общества.

– Точность и контроль. Использование интерактивных моделей в процессе обучения дает возможность контролировать процесс обучения, наблюдать за действиями учащихся и корректировать их, следить за их успеваемостью и потенциалом.

– Вовлеченность в процесс обучения. Происходит усиление интерактивности, а следовательно, и увеличение уровня мотивации, эмоциональное вовлечение в процесс обучения благоприятно влияет на уровень усвоения и запоминания материала.

– Возможность каждому ученику стать непосредственным участником учебного процесса. Каждый ученик видит результат своего труда, может проанализировать допущенные ошибки, сделать выводы и обобщить полученные знания и умения [2, 9].

Также отмечаются и недостатки: риск поверхностного восприятия, подмена цели, цифровое неравенство.

В рамках проведенного исследования была разработана коллекция интерактивных чертежей-моделей для методического сопровождения решения геометрических задач на построение повышенной сложности главы «Многоугольники. Четырехугольники» учебника: Мерзляк А. Г. Геометрия. 8 класс: углубленный уровень [10].

Интерактивные чертежи-модели разрабатывались к задачам:

1. На сторонах AB и BC треугольника ABC постройте соответственно такие точки M и K, чтобы $AM = BK$, $MK \parallel AC$.

2. Даны пересекающиеся прямые и точка, не лежащая на этих прямых. Постройте отрезок с концами на данных прямых и серединой в данной точке.

3 Точки M, N и K соответственно середины равных сторон AB, BC и CD четырехугольника $ABCD$. Постройте по этим точкам четырехугольник $ABCD$.

4. Даны точки A, C и M. Постройте ромб $ABCD$, если известно расстояние от точки M до точки N – середины стороны BC.

5. Продолжение медианы AM треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке D. Постройте треугольник ABC по заданным точкам A, B и D.

Дадим небольшой комментарий к рассматриваемым задачам. С точки зрения методики работы с задачей на построение процесс ее решения разбивают на этапы: анализ, построение, доказательство и исследование.

Исследование является завершающим этапом решения задачи и имеет целью установить условия разрешимости и определить число решений, т. е. необходимо ответить на следующие вопросы:

1) При любых ли допустимых значениях исходных данных задача имеет решение?

2) Сколько различных решений может быть получено при заданных условиях [4]?

На этом этапе видно явное преимущество динамических чертежей. Они предоставляют возможность варьировать элементы геометрической конфигурации и мгновенно видеть результат.

В качестве платформы для создания интерактивных чертежей-моделей была выбрана GeoGebra. В контексте школьной геометрии особенно ценно, что она дает возможность: создавать точные динамические чертежи, отражающие ход построения; исследовать свойства геометрических объектов путем манипуляции и наблюдения; осуществлять доказательства с помощью построения; встраивать текстовые комментарии, вопросы, гипотезы и пояснения в рабочие области. Все перечисленное делает возможным создать наглядные и интерактивные чертежи.

Представленные чертежи-модели по характеру активности при взаимодействии с пользователем имеют различный уровень интерактивности:

– условно-пассивный уровень характеризуется отсутствием взаимодействия пользователя с контентом, при этом контент имеет неизменный вид в процессе использования;

– активный уровень характеризуется простым взаимодействием пользователя с контентом на уровне элементарных операций с его составляющими (элементами);

– деятельностный уровень характеризуется конструктивным взаимодействием пользователя с элементами контента;

– исследовательский уровень ориентируется не на изучение предложенных событий, а на производство собственных событий [11].

Подготовленная коллекция интерактивных чертежей-моделей размещается на сайте программы GeoGebra и представляет собой GeoGebra-книгу «Занимательные задачи на построение» [8]. Структурно книга состоит из отдельных интерактивных рабочих страниц. Интерактивная страница – это документ, который содержит материалы для работы с одной задачей на построение. В нем присутствуют шесть рабочих областей, каждая из которых соответствует определенному этапу решения задачи. Некоторые из этих областей являются интерактивными полями и содержат динамические чертежи.

Интерфейс книги понятен. Главное меню позволяет переходить к отдельным страницам книги. Управление в каждой рабочей области осуществляется с помощью стандартных инструментов GeoGebra. Все элементы снабжены поясняющими подписями. Присутствуют функции сброса конструкции, панорамирования и масштабирования; доступ к меню и панели инструментов, кнопка проигрывания шагов построения, что позволяет контролировать этапность выполнения задания.

Продемонстрируем в виде рисунков рабочие области одной интерактивной страницы. Они соответствуют шести этапам решения задачи на построение.

1-й этап. Формулировка задачи. В верхней части страницы размещается условие задачи (рис. 1).

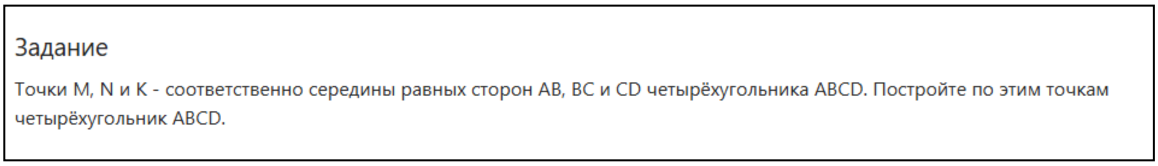

Рис. 1. Рабочая область первого этапа

На этом этапе осуществляется чтение текста с последующим обсуждением, что соответствует условно-пассивной форме интерактивности.

2-й этап. Пробное построение. Пользователю предлагается самостоятельно (без подсказок) выполнить построение, используя набор инструментов GeoGebra (рис. 2).

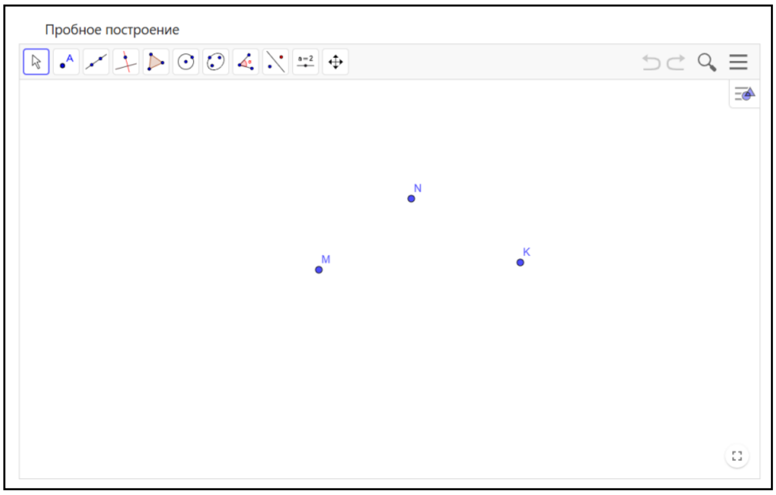

Рис. 2. Рабочая область второго этапа

На этом этапе осуществляется:

– введение/удаление объектов;

– перемещение объектов;

– масштабирование объектов для детального изучения;

– изменение параметров объектов.

Перечисленные взаимодействия пользователя с элементами чертежа соответствуют деятельностной или исследовательской форме интерактивности.

3-й этап. Анализ задачи. Представлен краткий текст анализа, в котором пошагово разбирается условие задачи: какие элементы заданы, как они между собой связаны, какие геометрические свойства фигур можно применить (рис. 3). При этом каждый шаг анализа подтверждается наглядным построением.

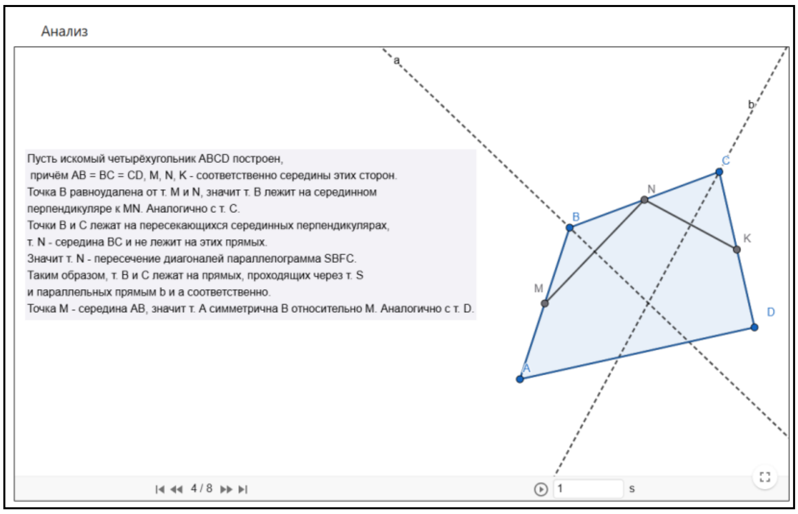

Рис. 3. Рабочая область третьего этапа

На этом этапе осуществляется:

– чтение текста, в том числе с управлением его движения в окне представления («листание» страниц, скроллинг);

– просмотр динамических изображений;

– частичное перемещение объектов;

– масштабирование объектов для детального изучения.

Перечисленные взаимодействия пользователя с элементами чертежа соответствуют условно-пассивной форме интерактивности.

4-й этап. Динамическое построение. Пошагово визуализируется каждый этап решения задачи с пояснениями (рис. 4).

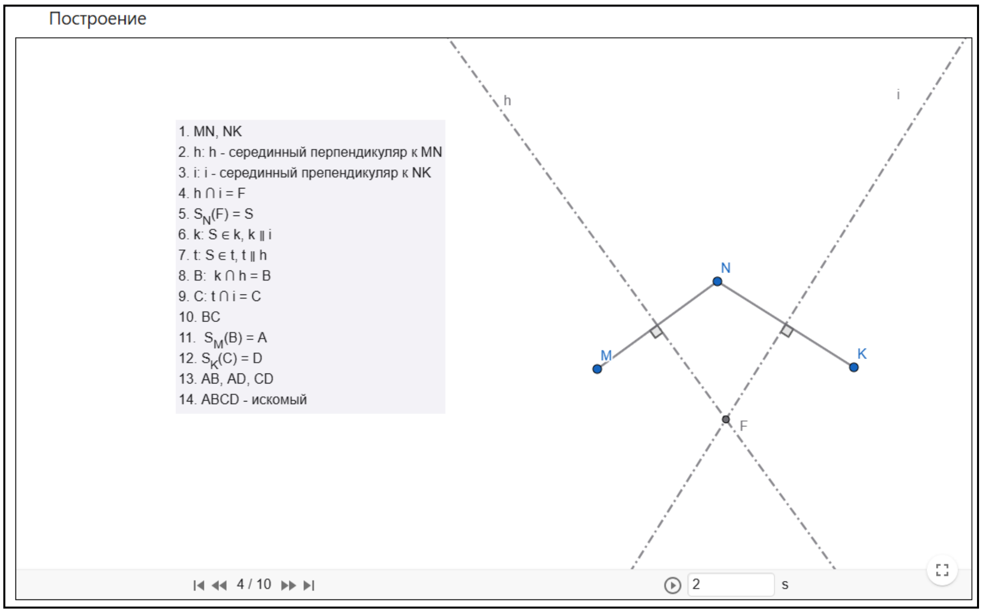

Рис. 4. Рабочая область четвертого этапа

На этом этапе осуществляется:

– чтение текста, в том числе с управлением его движения в окне представления («листание» страниц, скроллинг);

– просмотр динамических изображений;

– перемещение объектов;

– масштабирование объектов для детального изучения.

Перечисленные взаимодействия пользователя с элементами чертежа соответствуют условно-пассивной форме и частично активной форме интерактивности.

5-й этап. Доказательство. На этом этапе устанавливается, удовлетворяет ли представленное построение всем условиям задачи (рис. 5).

Доказательство

Убедимся в том, что построенный четырёхугольник ABCD удовлетворяет всем условиям задачи.

1. Точки M, N и K - соответственно середины сторон AB, BC и CD.

M - середина AB, K - середина CD (по построению). Докажем, что N - середина BC.

Рассмотрим четырёхугольник BSCF - параллелограмм (по построению).

BC и SF - диагонали параллелограмма BSCF. N ∈ SF, SN = NF (по построению). Значит, N - середина BC (по свойству параллелограмма).

2. Докажем, что AB = BC = CD.

Рассмотрим Δ MBN - равнобедренный, т.к высота совпадает с медианой. Значит, BM = BN.

Аналогично для Δ NCK, NC = CK.

BN = NC, BM = MA, CK = KD ⇒ BM = CK ⇒ AB = BC = CD.

Рис. 5. Рабочая область пятого этапа

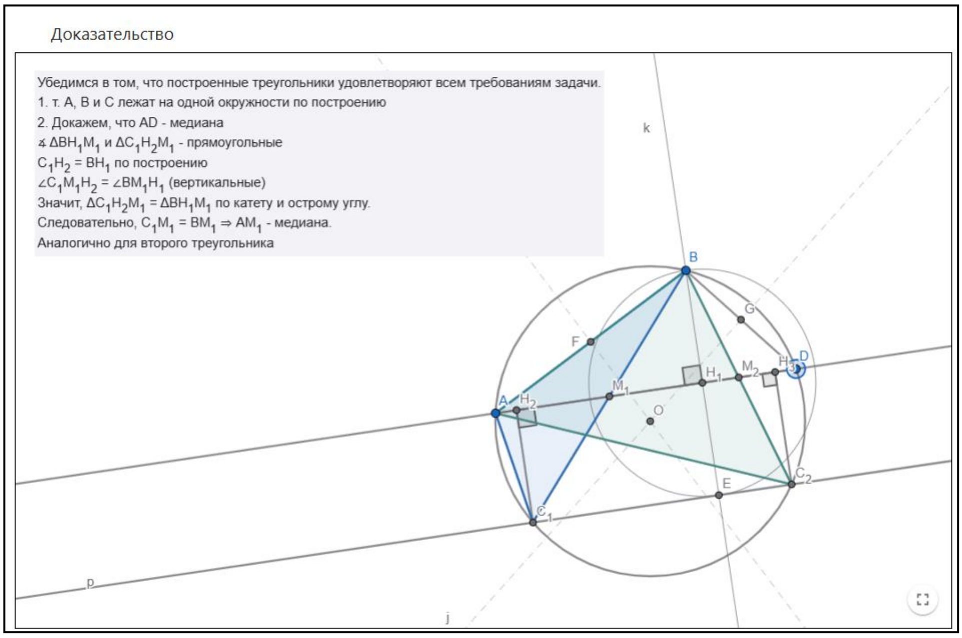

Рис. 5.1. Рабочая область пятого этапа

К основному способу взаимодействия на данном этапе можно отнести чтение текста. Однако в некоторых задачах можно отметить: просмотр динамических изображений; перемещение объектов; масштабирование объектов для детального изучения (рис. 5.1).

Перечисленные взаимодействия соответствуют условно-пассивной форме и активной форме интерактивности.

6-й этап. Исследование. На этом этапе пользователю предлагается выяснить, всегда ли можно выполнить построение, сколько решений имеет задача при всех возможных данных (рис. 6). Осуществить это можно за счет перемещения исходных данных на этапе построения.

Исследование

Построения 1-3 выполняются и притом однозначно.

Построение 4 возможно лишь тогда, когда точки M, N и K не лежат на одной прямой.

Построения 5-13 всегда выполнимы.

Значит, задача может иметь одно решение.

Рис. 6. Рабочая область шестого этапа

Сам этап исследования представлен в условно-пассивной форме интерактивности, однако его осуществление зависит от работы на этапе построения. Поэтому, в совокупности, данному этапу присуща активная форма интерактивности.

На наш взгляд, динамические чертежи трансформируют абстрактные геометрические факты в визуальные, интерактивные модели, что способствует более глубокому и осознанному усвоению материала. Смена уровней интерактивности на каждом этапе решения задач на построение способствует поддержанию вовлеченности пользователей (учащихся) в обсуждение проблем. Разработанные интерактивные модели могут эффективно использовать: учащиеся для самостоятельного изучения материала, студенты и учителя в образовательном процессе.

Список литературы

1. *Атанасян Л. С.* Математика. Геометрия. 7–9 классы: геометрия. 7–9 классы: базовый уровень : учеб. / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. 15-е изд., перераб. М. : Просвещение, 2024. 416 с.

2. *Баяндин Д. В.* Классификация интерактивных компьютерных моделей и структура процесса познания в физике // Современные проблемы науки и образования. Педагогика. 2013. № 2. URL: https://science-education.ru/ru/article/view?id=9018 (дата обращения: 25.09.2025).

3. *Буданцев Д. В.* Цифровизация в сфере образования: обзор российских научных публикаций // Молодой ученый. 2020. № 27(317). С. 120–127. URL: https://moluch.ru/archive/317/72477/ (дата обращения: 25.09.2025).

4. *Горшкова Л. С., Марина Е. В.* Геометрические построения : учеб. пособие для студ. и преподавателей пед. вузов. Пенза : Изд-во ПГПУ имени В. Г. Белинского, 2008. 140 с.

5. Динамическая математическая образовательная среда GeoGebra : учеб. пособие / А. Р. Есаян, Н. М. Добровольский, Е. А. Седова, А. В. Якушин. Тула : Изд-во Тульского гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2017. Ч. I. 417 с.

6. *Дронова Е. Н., Захарова Д. С.* Использование программы GeoGebra для решения геометрических задач основного государственного экзамена по математике // Вестник Алтайского государственного педагогического университета. 2017. № 31. С. 25–29. URL: https://journals-altspu.ru/vestnik/article/view/892 (дата обращения: 25.09.2025).

7. *Дубровский В. Н., Лебедева Н. А., Белайчук О. А.* 1С: математический конструктор – новая программа динамической геометрии // КИО. 2007. № 3. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/1s-matematicheskiy-konstruktor-novaya-programma-dinamicheskoy-geometrii-1 (дата обращения: 25.09.2025).

8. *Елфимова А. А.* Занимательные задачи на построение. URL: https://www.geogebra.org/m/q4z3cmgs (дата обращения: 25.09.2025).

9. *Зиатдинов Р. А., Ракута В. М.* Системы динамической геометрии как средство компьютерного моделирования в системе современного математического образования // European Journal of Contemporary Education. 2012. Vol. 1. № 1. Pp. 93–100. URL: https://ejce.cherkasgu.press/journals_n/1348513764.pdf (дата обращения: 25.09.2025).

10. *Мерзляк А. Г., Поляков В. М.* Геометрия. 8 класс: углубленный уровень : учеб. / под ред. В. Е. Подольского. 3-е изд., стер. М. : Просвещение : Вентана-Граф, 2021. 221 с.

11. *Осин А. В.* Электронные образовательные ресурсы нового поколения: открытые образовательные модульные мультимедиа системы // Интернет-порталы: содержание и технологии / редкол.: А. Н. Тихонов (пред.) и др. ; ФГУ ГНИИ ИТТ «Информика». М. : Просвещение, 2007. № 4. С. 12–29. URL: http://pozdnyakova.ucoz.ru/Praktikum/osin_ehor.pdf. (дата обращения: 25.09.2025).

12. *Фунтиков Р. А.* Обзор и сравнительный анализ динамических сред «Живая математика», «Математический конструктор» и «GeoGebra» // Молодой ученый. 2018. № 33 (219). С. 8–11. URL: https://moluch.ru/archive/219/52350/ (дата обращения: 25.09.2025).

13. 1С: математический конструктор. URL: https://obr.1c.ru/mathkit/index.html (дата обращения: 25.09.2025).

14. GeoGebra. URL: https://www.geogebra.org (дата обращения: 25.09.2025).

15. The Geometer's Sketchpad (Живая геометрия). URL: https://www.dynamicgeometry.com/ (дата обращения: 25.09.2025).

Dynamic drawings in geometric construction problems

Elfimova Aleksandra Aleksandrovna[1], Timshina Larisa Vyacheslavovna[2]

[1]master's student of the Department of Applied Mathematics and Computer science, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: alexandra.danil2017@yandex.ru

[2]senior lecturer of the Department of Fundamental mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. ORCID: 0000-0003-3279-8259.E-mail: larisatimshina@rambler.ru

Abstract. The implementation and development of interactive geometric environments is one of the most promising areas in mathematics teaching technologies. Consequently, identifying effective ways to use them in the educational process is important. This article proposes a set of interactive drawings for working with geometric problems. The problems selected are advanced construction problems for 8th grade.

Keywords: Dynamic drawings, geometric construction problems, GeoGebra.

References

1. *Atanasian L. S. Mathematics. Geometry. Grades 7–9: Geometry. Grades 7–9: Basic Level : Textbook* [Mathematics. Geometry. Grades 7–9: Geometry. Grades 7–9: Basic Level : Textbook] / L. S. Atanasian, V. F. Butuzov, S. B. Kadomtsev et al. 15th ed., revised. M., Prosveshchenie. 2024. 416 p.

2. *Bayandin D. V. Klassifikaciya interaktivnyh komp'yuternyh modelej i struktura processa poznaniya v fizike* [Classification of interactive computer models and the structure of the cognitive process in physics] // *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya. Pedagogika* – Modern problems of science and education, Pedagogy. 2013. No. 2. Available at: https://science-education.ru/ru/article/view?id=9018 (date accessed: 25.09.2025).

3. *Budantsev D. V. Cifrovizaciya v sfere obrazovaniya: obzor rossijskih nauchnyh publikacij* [Digitalization in education: a review of Russian scientific publications] // *Molodoj uchenyj* – Young scientist. 2020. No. 27 (317). Pp. 120–127. Available at: https://moluch.ru/archive/317/72477/ (date accessed: 25.09.2025).

4. *Gorshkova L. S., Marina E. V. Geometricheskie postroeniya : ucheb. posobie dlya stud. i prepodavatelej ped. vuzov* [Geometric constructions : a textbook for students and teachers of pedagogical universities]. Penza, Publishing house of Perm State Pedagogical University n. a. V. G. Belinsky. 2008. 140 p.

5. *Dinamicheskaya matematicheskaya obrazovatel'naya sreda GeoGebra : ucheb. posobie* [GeoGebra dynamic mathematical educational environment : textbook] / A. R. Yesayan, N. M. Dobrovolsky, E. A. Sedova, A. V. Yakushin. Tula, Publishing house of Tula State Pedagogical University n. a. L. N. Tolstoy. 2017. Part I. 417 p.

6. *Dronova E. N., Zakharova D. S. Ispol'zovanie programmy GeoGebra dlya resheniya geometricheskih zadach osnovnogo gosudarstvennogo ekzamena po matematike* [Using the GeoGebra program to solve geometric problems of the

main state exam in mathematics] // *Vestnik Altajskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta* – Bulletin of Altai State Pedagogical University. 2017. No. 31. Pp. 25–29. Available at: https://journals-altspu.ru/vestnik/ article/view/892 (date accessed: 25.09.2025).

7. *Dubrovsky V. N., Lebedeva N. A., Belaychuk O. A. 1S: matematicheskij konstruktor – novaya programma dinamicheskoj geometrii* [1C: Mathematical Constructor – a new program for dynamic geometry] // KIO. 2007. No. 3. Available at: https://cyberleninka.ru/article/n/1s-matematicheskiy-konstruktor-novaya-programma-dinamicheskoy-geometrii-1 (date accessed: 25.09.2025).

8. *Elfimova A. A. Zanimatel'nye zadachi na postroenie* [Fun construction problems]. Available at: https://www.geogebra.org/m/q4z3cmgs (date accessed: 25.09.2025).

9. *Ziatdinov R. A., Rakuta V. M. Sistemy dinamicheskoj geometrii kak sredstvo komp'yuternogo modelirovaniya v sisteme sovremennogo matematicheskogo obrazovaniya* [Dynamic geometry systems as a means of computer modeling in the system of modern mathematical education] // European Journal of Contemporary Education. 2012. Vol. 1. No. 1. Pp. 93–100. Available at: https://ejce.cherkasgu.press/journals_n/1348513764.pdf (date accessed: 25.09.2025).

10. *Merzlyak A. G., Polyakov V. M. Geometriya. 8 klass: uglublennyj uroven' : ucheb.* [Geometry. Grade 8: advanced level : textbook] / ed. by V. E. Podolsky. 3rd ed., reprinted. M., Prosveshchenie ; Ventana-Graf. 2021. 221 p.

11. *Osin A. V. Elektronnye obrazovatel'nye resursy novogo pokoleniya: otkrytye obrazovatel'nye modul'nye mul'timedia sistemy* [New generation electronic educational resources: open educational modular multimedia systems] // *Internet-portaly: soderzhanie i tekhnologii* – Internet Portals: Content and Technologies / ed. board: A. N. Tikhonov (chairman) et al.; Federal State Institution, Research Institute of Information Technologies and Technologies "Informika". M., Prosveshchenie. 2007. No. 4. Pp. 12–29. Available at: http://pozdnyakova.ucoz.ru/Praktikum/osin_ehor.pdf. (date accessed: 25.09.2025).

12. *Funtikov R. A. Obzor i sravnitel'nyj analiz dinamicheskih sred "Zhivaya matematika", "Matematicheskij konstruktor" i "GeoGebra"* [Review and comparative analysis of the dynamic environments "Living Mathematics", "Mathematical Constructor" and "GeoGebra"] // *Molodoj uchenyj* – Young scientist. 2018. No. 33 (219). Pp. 8–11. Available at: https://moluch.ru/archive/219/52350/ (date accessed: 25.09.2025).

13. 1C: Mathematical Constructor. Available at: https://obr.1c.ru/mathkit/index.html (date accessed: 25.09.2025).

14. GeoGebra. Available at: https://www.geogebra.org (date accessed: 25.09.2025).

15. The Geometer's Sketchpad (Living Mathematics). Available at: https://www.dynamicgeometry.com/ (date accessed: 25.09.2025).

Поступила в редакцию: 29.09.2025
Принята к публикации: 30.10.2025

УДК 511+164.043.4 EDN: UANSUS

Различные доказательства законов дистрибутивности для НОД и НОК целых чисел

Лубягина Елена Николаевна[1], Широков Дмитрий Владимирович[2]
[1] кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: usr11870@vyatsu.ru
[2] кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: usr11727@vyatsu.ru

Аннотация. В статье предложены четыре доказательства дистрибутивности бинарных операций взятия НОД и НОК относительно друг друга на множестве целых чисел $\mathbf{Z}$. Два доказательства опираются на свойства делимости, свойства простых чисел и взаимно простых чисел. На языке теории решеток обоснована дистрибутивность решетки натуральных чисел относительно отношения «делит». Четвертое доказательство использует изоморфизм решетки всех натуральных делителей натурального числа n и решетки всех подгрупп циклической группы n-го порядка.

Ключевые слова: теория чисел, решетка, циклическая группа, дистрибутивность, НОД, НОК.

1. Доказательство № 1, опирающееся на свойства НОД и НОК.

Введем необходимые определения и утверждения. Отношение *делит* | определяется условием

$$b \mid a \Leftrightarrow \exists c \in \mathbf{Z}\colon a = bc.$$

Число b называется *делителем* a (*a делится на b*), число a – *кратным* b.

Наибольшим общим делителем (НОД) множества целых чисел $\{a_1, \ldots, a_n\}$, среди которых есть ненулевое число, называется их наибольший общий делитель, обозначаемый $(a_1, \ldots, a_n)$. Считаем, что $(0, \ldots, 0) = 0$. *Наименьшее общее кратное* (НОК) $[a_1, \ldots, a_n]$ множества ненулевых целых чисел – это их наименьшее натуральное общее кратное. Считаем, что $[0, a_1, \ldots, a_n] = 0$.

Будем обозначать множество всех общих делителей (кратных) чисел $a_1, \ldots, a_n$ как $D(a_1, \ldots, a_n)$ (соответственно, $M(a_1, \ldots, a_n)$).

Следующие свойства выполняются для любых целых чисел, классические доказательства большинства из них можно найти в источниках [2, 6, 9]:

C1. *Отношение делит* | *рефлексивно* ($a \mid a$) и *транзитивно* ($b \mid a$ & $a \mid c$ $b \mid c$).

Доказательство. Действительно, $a = a \cdot 1 \Rightarrow a|a$. Кроме того, $b|a$ & $a|c$ $z, h \in \mathbf{Z}$ ($a = bz$, $c = ah$) $c = b(zh)$ $b|c$.

C2. $b \mid a$ & $a \neq 0$ $|b| \leq |a|$. *В частности,* $b \mid 1$ $b = \pm 1$.

Доказательство. Имеем: $b|a$ $c \in \mathbf{Z}$ ($a = bc$) $|a| = |bc| = |b| \cdot |c|$. Так как $a \neq 0$, то $|c| \geq 1$. Тогда $|a| \geq |b|$. В частности, $b|1 \Rightarrow b \neq 0$ & $1 \geq |b|$ $b = \pm 1$. Очевидно, $\pm 1 | 1$.

C3. *Имеют место характеристические свойства НОД и НОК*:

· $d = (a_1, \ldots, a_n)$ $d \in \mathbf{N}_0$ *делит числа* $a_1, \ldots, a_n$*, и* d *делится на любой их общий делитель.*

· $|m| = [a_1, \ldots, a_n]$ $m \in \mathbf{N}_0$ *делится на числа* $a_1, \ldots, a_n$*, и делит любое их общее кратное.*

Доказательство. Пусть ***n* = 2**. Разложение НОД $(a, b) = az_1 + bz_2$, где $z_1, z_2 \in \mathbf{Z}$, получим, например, по алгоритму Евклида. Поэтому (a, b) делится на любой $z \in D(a, b)$. Пусть общий делитель $d \in \mathbf{N}_0$ чисел a и b делится на любой их общий делитель. Если $d = 0$, то $a = b = 0 = (a, b)$. Если $d \neq 0$, то по свойству C2 d – наибольший из всех общих делителей a и b, то есть $d = (a, b)$.

Второе утверждение доказывается аналогично.

Пусть ***n* > 2**. Множество общих делителей чисел $a_1, \ldots, a_{n+1}$, совпадает с множеством общих делителей чисел $(a_1, \ldots, a_n)$ и a_{n+1}. Получаем цепочку эквивалентных условий:

[$d \in D(a_1, \ldots, a_{n+1})$ делится на любой общий делитель чисел $a_1, \ldots, a_{n+1}$] [$d \in D((a_1, \ldots, a_n), a_{n+1})$ делится на любой общий делитель $(a_1, \ldots, a_n)$ и a_{n+1}] $|d| = ((a_1, \ldots, a_n), a_{n+1}) \Leftrightarrow |d| = (a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$.

C4. $(a, b) = 1$ $az_1 + bz_2 = 1$ *для некоторых* $z_1, z_2 \in \mathbf{Z}$.

Доказательство. Прямое утверждение следует из алгоритма Евклида: $1 = (a, b) = az_1 + bz_2$. Пусть теперь $az_1 + bz_2 = 1$ для $z_1, z_2 \in \mathbf{Z}$, тогда любой общий делитель d чисел a и b делит и 1, то есть $d = \pm 1$ и $(a, b) = 1$.

C5. $(a, b) = 1$ $((a, c), (b, c)) = 1$.

Доказательство. Так как $(a, b) = 1$ и $(b, c) \mid b$, $(a, c) \mid a$, то по C4 $1 = az_1 + bz_2 = (a, c)z_1z_3 + (b, c)z_2z_4$ для $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbf{Z}$, поэтому $((a, c), (b, c)) = 1$.

C6. Пусть $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $d > 0$. Тогда $(a, b) = d(a/d, b/d)$ и $[(a, b) = d$ $(a/d, b/d) = 1]$.

Доказательство. В силу разложения НОД в алгоритме Евклида для положительного общего делителя d чисел a и b имеем: $(a, b) = d(a/d, b/d)$.

Если $(a/d, b/d) = 1$, то $(a, b) = d\cdot(a/d, b/d) = d$.

Если $d = (a, b)$ для $a\neq 0$, $b\neq 0$, то, поделив на $d\neq 0$ равенство $d = az_1+bz_2$, z_1, $z_2 \in \mathbf{Z}$, получим $1 = az_1/d+bz_2/d$. По С4 $(a/d, b/d) = 1$.

С7. $(a, b) = 1\ \&\ c \mid a\ (c, b) = 1$.

Доказательство. Так как $c \mid a$, то по С1 делители числа c делят a. Тогда в силу С3 $(c, b) \mid (a, b) = 1$. Итак, по С2 $(c, b) = 1$.

С8. $(a, b) = 1\ (ca, b) = (c, b)$.

Доказательство. По свойству С1 $D(c, b)\subseteq D(ca, b)$.

Для $d\in D(ca, b)$ в силу $(a, b) = 1$ имеем $1 = az_1 + bz_2 = az_1 + (dz_3)z_2$ для целых $z_{1,}, z_2, z_3$. Тогда $c = caz_1 + cdz_3z_2$ и $d|c$, то есть $d\in D(c, b)$. Поэтому $D(ca, b) \subseteq D(c, b)$. Значит, $D(c, b) = D(ca, b)$ и $(c, b) = (ca, b)$.

С9. $(a, b) = 1\ (c, ab) = (c, a)(c, b)$.

Доказательство. Если $b = c = 0$, то по условию $a = 1$, поэтому $(0, 1\cdot 0) = (0, 1)(0, 0)$.

Если $b\neq 0$ или $c\neq 0$, то по С6 $(\frac{b}{(c,b)}, \frac{c}{(c,b)}) = 1$. Так как $(b, a) = 1$ и $(c, b) \mid b$, то по С7 $((c, b), a) = 1$ и по С8 $(\frac{ab}{(c,b)}, \frac{c}{(c,b)}) = (a, \frac{c}{(c,b)}) = (a, \frac{(c,b)c}{(c,b)}) = (a, c)$. Тогда в силу С6 получим, что $(ab, c) = (c, b)(a, c)$.

С10. $[a, b] =$ *в случае, когда* $a\neq 0$ *или* $b\neq 0$.

Доказательство. Если $a = 0$, то $[0, b] = 0 = 0/(0, b)$. Случай $b = 0$ аналогичен.

Пусть $a\neq 0$ и $b\neq 0$. Обозначим $d = (a, b) \neq 0$. Тогда по С6 числа $a_1 = a/d$ и $b_1 = b/d$ взаимно просты. Нужно показать, что $[a, b] = |a_1b_1|\cdot d$.

Для любого $m\in M(a, b)$ имеем: $m = az_1 = bz_2$ $(z_1, z_2 \in \mathbf{Z})$ $m = a_1dz_1 = b_1dz_2 \Rightarrow a_1z_1 = b_1z_2$. Так как $(a_1, b_1) = 1$, то $b_1 \mid z_1$, то есть $z_1 = b_1z$ для $z\in \mathbf{Z}$ и $m = a_1b_1dz$. Значит, $M(a, b)\subseteq\{a_1b_1dz \mid z\in \mathbf{Z}\}$.

Поскольку по всем $z\in \mathbf{Z}$ числа a_1b_1dz кратны и a, и b, то $M(a, b) = \{a_1b_1dz \mid z\in \mathbf{Z}\}$.

Так как $a_1b_1d\neq 0$, то наименьшим натуральным числом в $M(a, b)$ будет $|a_1b_1|\cdot d$ (для него $z = \mathrm{sgn}(a_1b_1)$). Значит, $[a, b] = |a_1b_1|\cdot d$ и $[a, b] = |ab|/(a, b)$.

Опираясь на указанные свойства, докажем законы дистрибутивности бинарных операций взятия НОД и НОК относительно друг друга.

Теорема 1. *На множестве целых чисел* $\mathbf{Z}$ верны тождества:

$$(a, [b, c]) = [(a, b), (a, c)] \text{ и } [a, (b, c)] = ([a, b], [a, c]).$$

Доказательство. Если $b = c = 0$, то $(0, [0, 0]) = 0 = [(0, 0), (0, 0)]$.

Пусть $b\neq 0$ или $c\neq 0$. Обозначим: $d = (a, (b, c))$, $a_1 = \frac{a}{d}$, $d_1 = \frac{(b,c)}{d}$, $b_1 = \frac{b}{(b,c)}$, $c_1 = \frac{c}{(b,c)}$. Тогда $(a_1, d_1) = 1 = (b_1, c_1) \overset{C5}{==} ((a_1, b_1), (a_1, c_1))$, $dd_1b_1 = b$, $dd_1c_1 = c$ и

$$(a, [b, c]) \overset{C10}{==} (a, \frac{|bc|}{(b, c)}) = (a, \frac{bc}{(b, c)}) = (a, (b, c)\cdot\frac{b}{(b, c)}\cdot\frac{c}{(b, c)}) =$$
$$(a_1d, d_1db_1c_1) \overset{C6}{==} d(a_1, d_1b_1c_1) \overset{C8}{==} d(a_1, b_1c_1) \overset{C9}{==} d(a_1, b_1)(a_1, c_1)$$
$$\overset{C8}{==} \begin{cases} d(a_1, d_1b_1)(a_1, c_1) \\ d(a_1, b_1)(a_1, d_1c_1) \end{cases} \overset{C6}{==} \begin{cases} (da_1, dd_1b_1)(a_1, c_1) \\ (a_1, b_1)(da_1, dd_1c_1) \end{cases} = \begin{cases} (a, b)(a_1, c_1) \\ (a_1, b_1)(a, c) \end{cases}.$$

Преобразуем:

$$(a, [b, c])((a, b), (a, c)) \overset{C6}{==} ((a, [b, c])(a, b), (a, [b, c])(a, c)) =$$
$$((a_1, b_1)(a, c)(a, b), (a_1, c_1)(a, b)(a, c)) =$$
$$(a, b)\cdot(a, c)\cdot((a_1, c_1), (a_1, b_1)) = (a, b)\cdot(a, c).$$

Значит, $(a, [b, c]) = \frac{(a,b)\cdot(a,c)}{((a,b),(a,c))} \overset{C10}{==} [(a, b), (a, c)]$.

Доказательство равенства $[a, (b, c)] = ([a, b], [a, c])$ проводится аналогично.

Как следствие получаем следующее свойство

С11. *Для ненулевых чисел верны равенства*

$$[a, b, c] = \text{ и } (a, b, c) = \frac{|abc|[a,b,c]}{[a,b][a,c][b,c]}.$$

Доказательство. Будем использовать обозначения и результаты доказательства законов дистрибутивности, в том числе равенство $(a, [b, c]) == d(a_1, d_1b_1)(a_1, d_1c_1)$:

$$[a, b, c] = [a, [b, c]] = = =$$
$$= = \frac{|abc|(a,b,c)}{(a,b)(a,c)(b,c)}.$$

2. Доказательство № 2, использующее основную теорему арифметики.

Второе доказательство законов дистрибутивности опирается на понятие простого числа и основную теорему арифметики.

Натуральное число p называется *простым*, если оно имеет только два натуральных делителя $1 \neq p$. *Порядок* $O_p(n)$ *вхождения* простого числа p в разложение натурального числа $n \neq 1$ – такое наибольшее неотрицательное число s, что | n:

$$s = O_p(n) \mid n \;\&\; \nmid \; n.$$

Имеем: $O_p(nm) = O_p(n)+O_p(m)$ и $m \mid n$ $O_p(n/m) = O_p(n) - O_p(m)$.

Основная теорема арифметики [6]. *Любое натуральное число, большее* 1, *представляется в виде произведения простых чисел, причем однозначно с точностью до порядка следования множителей*.

Основная теорема арифметики может быть сформулирована следующим образом: *любое натуральное число* $n \neq 1$ *представимо в виде произведения степеней* $p^{O_p(n)}$ *по всем простым* p: $n = \prod\limits_{p\text{ - прост.}} p^{O_p(n)}$. Для числа 1 имеем аналогичное разложение $1 = \prod\limits_{p\text{ - пост.}} p^0$.

C12. *Для любых натуральных чисел* $a_1, ..., a_n$:

$$(a_1, ..., a_n) = \prod_{p\text{ - прост.}} p^{\min(O_p(a_1),\dots,O_p(a_n))} \text{ и } [a_1, ..., a_n] = \prod_{p\text{ - прост.}} p^{\max(O_p(a_1),\dots,O_p(a_n))}.$$

Доказательство. Достаточно обосновать случай $n = 2$. Правые части указанных формул задают общий делитель d и общее кратное m чисел a и b. По свойству C3 имеем: $(a, b) = dg$ и $m = [a, b]q$. В силу основной теоремы арифметики невозможно добавить простых множителей к d, чтобы получить новый общий делитель, то $(a, b) = d$. Так как нельзя убрать простые множители из разложения m, чтобы получить новое общее кратное, то $[a, b] = m$.

Получаем следующее:

Доказательство теоремы 1. Заметим, что достаточно обосновать тождества дистрибутивности на множестве **N**, поскольку НОД и НОК не зависят от знаков аргументов, а при наличии хотя бы одного нулевого числа проверяются непосредственно с учетом равенств $(0, z) = z$ и $[0, z] = 0$:

- $a = 0$ $(0, [b, c]) = [b, c] = [(0, b), (0, c)]$ и $[0, (b, c)]) = 0 = ([0, b], [0, c])$.
- $b = 0$ $(a, [0, c]) = a = [(a, 0), (a, c)]$ и $[a, (0, c)] = [a, c] = ([a, 0], [a, c])$.
- $c = 0 \Rightarrow (a, [b, 0]) = a = [(a, b), (a, 0)]$ и $[a, (b, 0)] = [a, b] = ([a, b], [a, 0])$.

Пусть a, b, c положительны. Зафиксируем произвольное простое число p. Обозначим $n = (a, [b, c])$, $m = [(a, b), (a, c)]$, $x = O_p(a)$, $y = O_p(b)$, $z = O_p(c)$. В силу C12

$$O_p(n) = \min(O_p(a), O_p([b, c])) = \min(O_p(a), \max(O_p(b), O_p(c))) \text{ и } O_p(m) = \max(\min(O_p(a), O_p(b)), \min(O_p(a), O_p(c))).$$

Тогда $O_p(n) = \min(x, \max(y, z)) \overset{(1)}{=} \max(\min(x, y), \min(x, z)) = O_p(n)$ $n = m$. При этом тождество (1) верно для любых $x, y, z \in \mathrm{R}$, а для его проверки достаточно рассмотреть следующие случаи, обозначив $A = \min(y, z)$ и $B = \max(y, z)$:

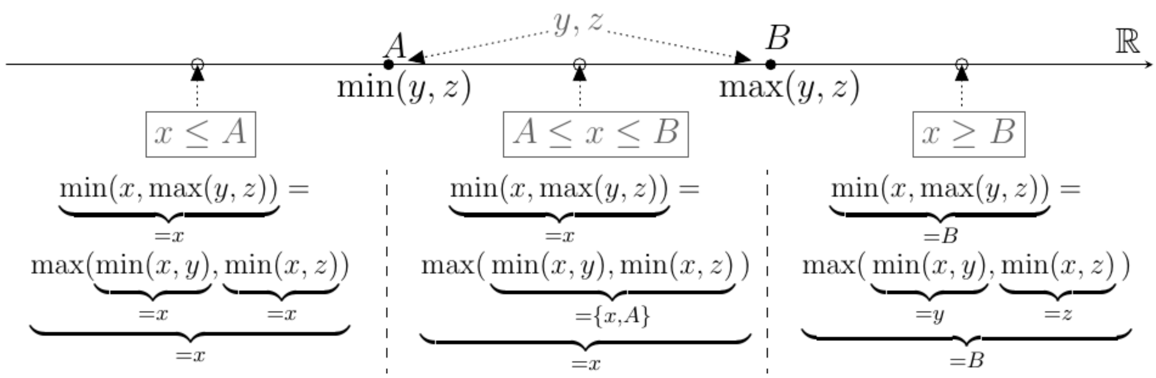

Рис. 1. Проверка тождества

Доказательство дистрибутивного закона $[a, (b, c)] = ([a, b], [a, c])$ опирается на тождество

$$\max(x, \min(y, z)) = \min(\max(x, y), \max(x, z)),$$

которое получается из тождества (1) взаимной заменой max и min (то есть направления числовой оси) и верно в силу аналогичных рассуждений.

Как и в предыдущем пункте, приведенную методику доказательства можно перенести на доказательство свойства C11.

Доказательство C11. В силу условия числа $[a, b, c]$ и натуральные.

Зафиксируем произвольное простое число p. Обозначим $n = [a, b, c]$ и $m = \frac{abc(a,b,c)}{(a,b)(a,c)(b,c)}$, $x = O_p(a)$, $y = O_p(b)$, $z = O_p(c)$. По свойству С11 получаем:

$$O_p(n) = \max(O_p(a), O_p(b), O_p(c)),$$

$$O_p(m) = O_p(a)+O_p(b)+O_p(c)+O_p((a,b,c))–O_p((a,b))–O_p((a,c))–O_p((b,c)) =$$
$$O_p(a)+O_p(b)+O_p(c)+\min(O_p(a),O_p(a),O_p(c))–$$
$$\min(O_p(a),O_p(a))–\min(O_p(a),O_p(c))–\min(O_p(b),O_p(c)).$$

Тогда $O_p(m) = x+y+z+\min(x, y, z)–(\min(x, y)+\min(x, z)+\min(y, z) \overset{(2)}{=} \max(x, y, z) = O_p(n)$, и, значит, $n = m$. Для обоснования равенства (2) воспользуемся иллюстрацией:

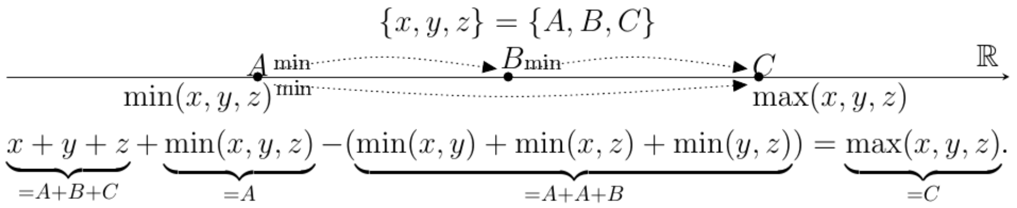

Рис. 2. Обоснование равенства

Доказательство второго тождества получается из предыдущего взаимной заменой НОД и НОК и опирается на тождество, двойственное (2):

$$x+y+z+\max(x, y, z)–(\max(x, y)+\max(x, z)+\max(y, z)) = \min(x, y, z). \square$$

Замечание. Отношение делимости можно определить в любой полугруппе, а законы дистрибутивности для НОД и НОК будут верны в любой арифметической полугруппе (см. [5]). Дадим соответствующие определения.

Непустое множество G с определенной на нем ассоциативной операцией $\cdot$ ($\forall a,b,c\in G$: $(ab)c = a(bc)$) называется *полугруппой*. Тогда запись $b|a$ означает, что $a = bc$ для некоторого $c\in G$. НОД совокупности элементов полугруппы G можно определить как такой их общий делитель, который делится на любой общий делитель этих элементов.

Полугруппа $\langle G, \cdot\rangle$ с коммутативной и сократимой операцией ($\forall a,b, c \in G$: $ab = ba$ и если $ac = bc$, то $a = b$) называется *арифметической*, если содержит единственный обратимый элемент 1 ($\forall a, b \in G$: $1a = a$ и если $ab = 1$, то $a = 1$) и ее любые два элемента имеют в ней НОД.

Очевидно, что $\langle \mathbf{N}, \cdot\rangle$ и $\langle \mathbf{Z}, \cdot\rangle$ – примеры арифметических полугрупп.

3. Доказательство № 3, использующее признак дистрибутивности решетки.

Введем необходимые определения и утверждения (см. также [4, 7]).

Множество A называется *упорядоченным*, если на нем введено отношение *порядка* $\leq$, то есть бинарное отношение, обладающее свойствами рефлексивности ($\forall a\in A$: $a\leq a$), антисимметричности ($a\leq b$ & $b\leq a$ $a = b$) и транзитивности ($a\leq b$ & $b\leq c$ $a\leq c$).

Если $a\leq b$ и $a\neq b$, будем писать $a<b$.

В силу свойств С1 и С2 на множестве натуральных чисел **N** отношение делит | является отношением порядка, то есть <**N**, | > – упорядоченное множество.

Элемент e упорядоченного множества $<A, \leq>$ называется:

· *наименьшим* (*наибольшим*), если $\forall a\in A$: $e\leq a$ ($a\leq e$);

· *минимальным* (*максимальным*), если в A нет такого a, что $a<e$ ($e<a$);

· *последующим* для $a\in A$ (тогда a – *предыдущий* для e), если $a\leq e$ и при этом $a\leq x\leq e$ $x\in\{a, e\}$.

Конечные упорядоченные множества $<A, \leq>$ возможно изобразить *диаграммой Хассе*, которая строится по следующему алгоритму:

· множество A_1 всех минимальных элементов в A отмечаем точками 1-го горизонтального уровня;

· множество A_2 всех минимальных элементов в $A \setminus A_1$ – точками 2-го;

· по множеству $A \setminus (A_1 \cup A_2)$ получаем точки 3-го уровня

и так далее, пока не переберем все элементы;

· соединяем отрезком точки x и y, если y – последующий элемент для x.

Аналогично можно строить фрагменты диаграммы Хассе для бесконечного множества. Например, для <**N**, | > , ограничившись только числами 2, 3, 5, 7, 11 второго уровня, получим:

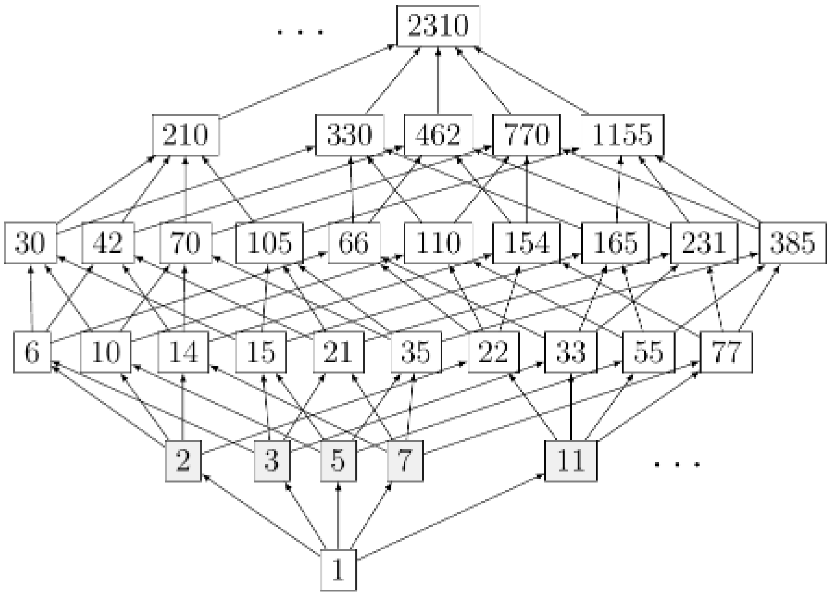

Рис. 3. Построение фрагмента диаграммы Хассе

Элемент e упорядоченного множества $<A, \leq>$ называется:

· *нижней* (*верхней*) *гранью* для $M \subseteq A$, если $\forall\, m \in M$: $e \leq m$ ($m \leq e$);

· *точной нижней* (*точной верхней*) *гранью* множества $M \subseteq A$, если e – наибольший (наименьший) из всех нижних (верхних) граней для M.

На основании свойства С3 получаем, что в <**N**, | > точной нижней гранью любого конечного множества чисел будет их НОД, а точной верхней гранью – их НОК.

Упорядоченное множество, в котором любые два элемента имеют точные нижнюю и верхнюю грани, называется *решеткой*. Получаем, что <**N**, | > – решетка.

Подмножество решетки L, замкнутое относительно взятия точной нижней грани и точной верхней грани, называется ее *подрешеткой*.

Для решетки $<L, \leq>$ взятие точной верхней и точной нижней граней будем рассматривать как операции сложения + и умножения ·. Оперируя ими, определим отношение $\leq$: $a \ b \Leftrightarrow a+b = b$ ($\Leftrightarrow ab = a$).

Имеет место следующее свойство

С 13. *В решетке* $\langle L, \leq, +, \cdot\rangle$ *верны следующие свойства* ($\forall a, b, c, d \in L$):

1) $a + a = a$, $aa = a$ (*идемпотентность*);

2) $a + b = b + a$, $ab = ba$;

3) $a \leq a + b$, $ab \leq a$;

4) $a + ab = a$, $a(a + b) = a$ (*законы поглощения*);

5) $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(ab)c = a(bc)$;

6) $a \leq c \;\&\; b \leq d \Rightarrow a + b \leq c + d \;\&\; ab \leq cd$.

Доказательство. Тождества 1) и 2) сразу следуют из определения операций сложения и умножения в решетке $\langle L, \leq\rangle$. Соотношения 3) и 4) вытекают из определений точных граней множества.

Докажем равенство 5). Пусть a, b, c – произвольные элементы решетки L. Покажем, что $(a + b) + c = \sup\{a, b, c\}$. Обозначим $a + b = d$. Имеем: $c \leq d + c$, $a \leq d$, $b \leq d$. Так как $d \leq d + c$, то $a \leq d + c$, $b \leq d + c$. Значит, $d + c$ – верхняя грань множества $\{a, b, c\}$. Пусть x – произвольная верхняя грань множества $\{a, b, c\}$. Тогда $a \leq x$, $b \leq x$, $c \leq x$, то есть x – верхняя грань для a и b, поэтому $d = a + b \leq x$. Учитывая неравенство $c \leq x$, получаем $d + c \leq x$. Отсюда следует, что $d + c$ – точная верхняя грань для $\{a, b, c\}$. Значит, $(a + b) + c = \sup\{a, b, c\}$.

Аналогично, $a + (b + c) = \sup\{a, b, c\} = (a + b) + c$ и $a(bc) = \inf\{a, b, c\} = (ab)c$.

Докажем 6). Пусть верны посылки утверждения. Тогда $a \leq c \leq c + d$ и $b \leq d \leq c + d$. Получаем, что $a + b \leq c + d$. Так как $ab \leq a \leq c$ и $ab \leq b \leq d$, то имеем неравенство $ab \leq cd$.

□

В любой решетке верны соотношения: $ab \le a$, $ab \le ab + c$, $c \le ab + c$, а потому $ab \le a(ab + c)$, $ac \le a(ab + c)$ и $ab + ac \le a(ab + c)$. Кроме того, если $a \le b$, то $ab = a$ и $ab + ac = a + ac = a = a(a + c) = a(ab + c)$. Решетка $<L, +, \cdot>$ называется *модулярной*, если верно тождество $a(ab + c) = ab + ac$.

Модулярность решетки L равносильна выполнению условия: $\forall a, b, c \in L$ $(b < a \Rightarrow a(b + c) = ab + ac)$. Действительно, если данное условие выполнено, то, обозначив $ab = m \le a$, получим $ab + ac = am + ac = a(m + c) = a(ab + c)$.

В любой решетке $ab \le a(b + c)$, $ac \le a(b + c)$, и потому $ab + ac \le a(b + c)$. Решетка $<L, +, \cdot>$ называется *дистрибутивной*, если умножение дистрибутивно относительно сложения: $a(b + c) = ab + ac$. В силу определения любая дистрибутивная решетка модулярна.

Подробнее свойства решеток приведены в [7]. Имеет место следующий признак дистрибутивности решетки:

Теорема 2. *Если для любых элементов a, b, c решетки $<L, +, \cdot>$ верна импликация*

$$a + b = a + c \ \& \ ab = ac \quad b = c,$$

то она дистрибутивна.

Доказательство. Предположим, что L не модулярна. Тогда найдутся такие $b < a$, что $a(b + c) \neq ab + ac$, точнее, $a(b + c) > ab + ac$. Обозначим $x = a(b + c)$ и $y = ab + ac = b + ac$. Так как $x > y$, то $x + c \ge y + c$ и $xc \ge yc$.

Рассмотрим элементы $x + c = a(b + c) + c$, $y + c = b + ac + c = b + c$, $xc = a(b + c)c = ac$, $yc = (b + ac)c$. Поскольку $(b + c)a \le b + c$, $c \le b + c$, то $x + c = a(b + c) + c \le b + c = y + c$. Поскольку $ac \le b + ac$, $ac \le c$, то $xc = ac \le (b + ac)c = yc$. Итак, $x + c = y + c$ и $xc = yc$. Значит, $x = y$ – противоречие. Следовательно, решетка L модулярна.

Возьмем произвольные x, y, z из L. В модулярной решетке имеем $x(y + z) = x(x + z)(y + z) = x(x + y)(x + z)(y + z)$ и $xy + xz = xy + xz + xyz = x(xy + xz + yz)$.

Для элементов $a = x(y + z) + yz$, $b = y(x + z) + xz$, $c = z(x + y) + xy$ имеем:

$$a + c = x(y + z) + yz + z(x + y) + xy = x(xy + y + z) + z(yz + x + y) = x(y + z) + z(x + y) =$$
$$= x(x + y)(y + z) + z(x + y) = (x + y)(x(x + y)(y + z) + z) = (x + y)(x(y + z) + z) =$$
$$= (x + y)(x(y + z) + z(y + z)) = (x + y)(y + z)(x + z(y + z)) = (x + y)(y + z)(x + z).$$

Получили симметричное относительно x, y, z выражение (терм). Так как каждый из трех термов, задающих элементы a, b, c, получается из какого-то другого терма взаимной заменой двух переменных, то верны равенства: $a + c = b + c = a + b = (x + y)(y + z)(x + z)$.

Аналогично:

$$ac = (x(y + z) + yz)(z(x + y) + xy) = (x(y + z) + yz(y + z))(z(x + y) + xy(x + y)) =$$
$$(y + z)(x + yz(y + z))(y + x)(z + xy(x + y)) =$$
$$\underline{(y + z + xy)}(x + yz)(y + x + yz)\underline{(z + xy)} = (x + yz)(z + xy) = (x + yz)(z + xy(x + yz)) =$$
$$(x + yz)z + xy(x + yz) = xz + yz + xy.$$

В силу симметричности полученного выражения имеем $ac = bc = ab = xy + xz + yz$.

Итак, $a + c = b + c \ \& \ ac = bc \Rightarrow a = b$.

Значит, $x(y + z) = x(x + y)(x + z)(y + z) = x(a + b) = xa = xab = x(xy + xz + yz) = xy + xz$. Тогда решетка $<L, +, \cdot>$ дистрибутивна. □

В силу С10 из равенств $[a, b] = [a, c]$ и $(a, b) = (a, c)$ следует, что $ab = ac$, что влечет $b = c$. Тогда по теореме 2 получаем

Следствие. *Решетка* $<\mathbf{N}, |>$ *дистрибутивна.*

В силу определения дистрибутивность решетки $<\mathbf{N}, |>$ равнозначна законам дистрибутивности в $\mathbf{N}$:

$$(a, [b, c]) = [(a, b), (a, c)] \text{ и } [a, (b, c)] = ([a, b], [a, c]).$$

Значит, законы дистрибутивности верны в $\mathbf{Z}$.

4. Доказательство № 4, использующее изоморфизм решеток.

Для произвольного натурального числа n обозначим через $D(n)$ множество всех его натуральных делителей. Упорядоченные множества $<D(n), |>$ есть подрешетки решетки $<\mathbf{N}, |>$.

Упорядоченные множества $<A, \le>$ и $<B, \le>$ называются *изоморфными*, если существует биекция $f: A \to B$, сохраняющая порядок:

$$a \le b \quad f(a) \le f(b) \text{ для } a, b \in A.$$

Изоморфные упорядоченные множества имеют одни и те же порядковые свойства. В частности, решетка, изоморфная дистрибутивной решетке, также дистрибутивна.

Покажем, что решетка $<D(n), |>$ изоморфна решетке подгрупп произвольной циклической группы n-го порядка. Начнем с необходимой терминологии.

Полугруппа $<G, \cdot>$ называется *группой*, если G содержит нейтральный элемент 1 ($\forall a \in G$: $a1 = a = 1a$) и с каждым элементом a содержит симметричный к нему a^{-1} ($aa^{-1} = 1 = a^{-1}a$). Непустое подмножество H группы G называется ее *подгруппой,* если оно само является группой относительно операции в G.

В качестве пособий по основам теории групп предложим источники [3, 5, 8].

Количество элементов конечной группы называется ее *порядком*. Очевидно, порядок подгруппы конечной группы конечен.

Рассмотрим упорядоченное множество $<L, \subseteq>$ всех подгрупп группы $<G, \cdot>$, упорядоченное отношением включения. Данная структура изучается в источниках [1, 10, 11].

Подгруппой, *порожденной подмножеством* M группы G, называется пересечение всех подгрупп G, содержащих M. При этом множество M называется *порождающим*.

Получаем, что в $<L, \subseteq>$ точной нижней гранью семейства подгрупп является их пересечение, а точной верхней гранью – подгруппа, порожденная объединением этого семейства. Итак, $<L, \subseteq>$ – решетка.

В группе $<G, \cdot>$ произвольным элементом $g\in G$ порождается *циклическая* подгруппа $(g) = \{g^z: z\in\mathbf{Z}\}$.

Порядком элемента x группы $<G, \cdot>$ называется наименьшее натуральное число n, для которого $x^n = 1$. Если такого числа n нет, то говорят, что x имеет бесконечный порядок.

Далее будем опираться на следующие свойства, доказательства которых можно найти в [3]:

С14. *В произвольной группе* $<G, \cdot>$ *для любого элемента порядка* n *и произвольных целых чисел* k_1, k_2 *имеем*: $n \mid (k_1-k_2)$.

Доказательство. Обозначим через $r_n(k)$ остаток от деления $k\in\mathbf{Z}$ на $n\in\mathbf{N}$. Тогда для любой степени k имеем: $g^k =$ для $q\in\mathbf{Z}$, $0\leq r_n(k)<n$. Тогда $g^{k_1} = g^{k_2} \Leftrightarrow g^{k_1-k_2} = 1 \Leftrightarrow 1 = g^{r_n(k_1-k_2)} \Leftrightarrow r_n(k_1 - k_2) = 0 \Leftrightarrow n \mid (k_1- k_2)$.

С15. *Порядок элемента конечной группы конечен. Для любой циклической подгруппы с образующим а порядка n имеем*: $(g) = \{1, g, \ldots, g^{n-1}\}$.

Доказательство. Первое утверждение очевидно.

Для любой степени $k\in\mathbf{Z}$ элемента порядка n имеем: $g^k = g^{r_n(k)}$. Поэтому $(g) = \{g^0 = 1, g^1 = g, \ldots, g^{n-1}\}$ содержит не более n элементов.

Если $g^i = g^j$ для $0\leq i<j<n$, то $g^{j-i} = 1$, $n > j-i\in\mathbf{N}$, что невыполнимо для элемента порядка n. Значит, степени $g^0, g^1, \ldots, g^{n-1}$ различны.

С16. *Для циклической группы G n-го порядка*:

1) *любая ее подгруппа является циклической, ее порядок делит n;*

2) *для любого делителя d числа n существует единственная подгруппа в G порядка d.*

Доказательство. 1) Для циклической группы (g) возьмем произвольную подгруппу H, отличную от циклической подгруппы $\{1\}$. Обозначим $m = \min\{n\in\mathbf{N} \mid 1\neq g^n\in H\}$. Имеем: $(g^m)\subseteq H$.

Для произвольного элемента $h\in H\subseteq(g)$ получаем, что $h = g^z$, $z\in\mathbf{Z}$. Поделим z на $m\neq 0$ с остатком: $z = mq + r$, q, $r\in\mathbf{Z}$, $0\leq r<m$. Тогда $h = g^z = (g^m)^q g^r$, а $g^r = h((g^m)^q)^{-1}\in H$ и $g^r = 1$ в силу минимальности показателя m, для которого $1\neq g^m\in H$. Значит, $h = (g^m)^q$ и $H\subseteq(g^m)$. Итак, $H = (g^m)$.

По следствию теоремы Лагранжа порядок d элемента g^m делит n. Итак, $|H| = d$, то есть $H = \{1, g^m, \ldots, (g^m)^{d-1}\}$.

2) Для делителя d числа n обозначим $m = n/d$. Тогда циклическая подгруппа $(g^m) = \{1 = g^{0m}, g^m, \ldots, g^{(d-1)m}\}\subseteq(g)$ содержит d элементов, поскольку для показателей указанных степеней g^{im} выполняется ограничение:

$$0\leq im\leq(d-1)m<dm = n.$$

Пусть $n = dm$ и подгруппа $H\subseteq(g)$ содержит d элементов. Имеем: $H = (g^k)$. Порядок g^k равен d, и, значит, $1 = (g^k)^d = g^{kd}$. Тогда $n \mid kd$, то есть $kd = nz = dmz$, $z\in\mathbf{Z}$. Получаем, что $k = mz$ и $g^k = (g^m)^z\in(g^m)$. Значит, $(g^k) \subseteq(g^m)$, что возможно только при $(g^k) = (g^m)$ (в силу равенства числа элементов этих подгрупп), то есть в (g) подгруппа порядка d единственна.

Имеет место следующая:

Теорема 3. *Решетка* $<D(n), \mid>$ *всех натуральных делителей натурального числа n изоморфна решетке* $<L, \subseteq>$ *всех подгрупп циклической группы n-го порядка.*

Доказательство. Для циклической группы (a) n-го порядка в силу С16 имеет место сюръективное отображение $\varphi : D(n)\to L$, $\varphi(d) = (a^{n/d})$.

Если то для $k \in \mathbf{Z}$,тогда по С14 получаем, что $n/d_1-kn/d_2 = nz$ для z$\in\mathbf{Z}$. Тогда $d_2 = kd_1 + zd_1d_2 \vdots d_1$. Аналогично из получаем, что $d_1 \vdots d_2$.

Значит, если то $d_1 = d_2$, то есть φ инъективно.

Пусть – делители числа n. Если $d_1|d_2$, то для z$\in\mathbf{Z}$, поэтому $(a^{n/d_1}) = (a^{nz/d_2}) \subseteq (a^{n/d_2})$. Как показано выше, $d_1|d_2$. Значит, φ – изоморфизм.

Пример. Для решетки $<D(24), \mid>$ и решетки всех подгрупп циклической группы, порожденной элементом a порядка 24, получаем следующие диаграммы Хассе:

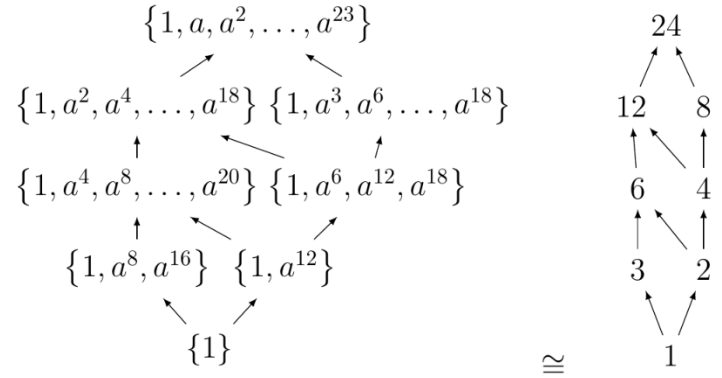

Рис. 4. Диаграммы Хассе

Приведем признак дистрибутивности решетки подгрупп произвольной группы.

Теорема 4. *Если каждое конечное подмножество группы <G, · > порождает циклическую подгруппу, то решетка <L, $\subseteq$ > всех ее подгрупп дистрибутивна.*

Доказательство. Для произвольных элементов $x, y \in G$ имеем $(x, y) = (z)$ для некоторого $z \in G$. Тогда $xy = z^{s_1}z^{s_2} = yx$ для $s_1, s_2 \in \mathbf{Z}$. Значит, G коммутативна. Поэтому точная верхняя грань подгрупп A, B имеет вид $A + B = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$.

Пусть $A, B, C \in L$. Тогда $AB + AC \subseteq A(B + C)$. Покажем обратное включение.

Для произвольного элемента $x \in A(B + C)$ имеем $x = bc \in A$ для некоторых $b \in B$ и $c \in C$. По условию теоремы $(b, c) = (a)$ для некоторого $a \in G$. Тогда $b = a^{z_1}$, $c =$ и $a =$ для $z_1, z_2, s_1, s_2 \in \mathbf{Z}$. Тогда

$$x = bc = a^{z_1 + z_2} = a^{(z_1s_1 + z_2s_2)(z_1 + z_2)} =$$
$$a^{z_1s_1(z_1 + z_2)}a^{z_2s_2(z_1 + z_2)} = b^{s_1(z_1 + z_2)}c^{s_2(z_1 + z_2)} \in AB + AC,$$

поскольку и $c^{s_2(z_1 + z_2)} = x^{z_2s_2}$ лежат в A.

Итак, $AB + AC \supseteq A(B + C)$. Значит, $AB + AC = A(B + C)$ и решетка <L, $\subseteq$ > дистрибутивна.

Так как по свойству С16 любая подгруппа циклической группы циклическая, то в силу теоремы 4 решетка всех подгрупп циклической группы дистрибутивна. Значит, дистрибутивны и все изоморфные ей решетки. Таким образом, получаем

Следствие. *Решетка <D(n), | > дистрибутивна при любом $n \in$* **N**.

Итак, дистрибутивные законы верны на всем **N**, а значит, и на **Z.**

Приведенные методы обоснования одного и того же закона не только позволяют подойти к проблеме с разных сторон, но и иллюстрируют связь дисциплин «Теория чисел» и «Теория упорядоченных множеств». Статья будет полезна студентам математических направлений подготовки.

Список литературы

1. *Акимов О. Е.* Дискретная математика: логика, группы, графы. М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2001. 352 с.

2. *Вечтомов Е. М.* Основы теории делимости // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2002. № 4. С. 61–73.

3. *Вечтомов Е. М., Ковязина Е. М.* Циклические группы и числа // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2001. № 3. С. 79–87.

4. *Вечтомов Е. М., Широков Д. В.* Упорядоченные множества и решетки. СПб. : Лань, 2024. 248 с.

5. *Вечтомов Е. М.* Математика: основные математические структуры : учеб. пособие для среднего профессионального образования. 2-е изд. М. : Юрайт, 2024. 291 с.

6. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. М. : Юрайт, 2025. 123 с.

7. *Гретцер Г.* Общая теория решеток / пер. с англ. М. : Мир, 1982. 568 с.

8. *Гроссман И., Магнус В.* Группы и их графы / пер. с англ. М. : Мир, 1971. 247 с.

9. *Ильиных А. П.* Теория чисел : учеб. пособие. Екатеринбург : Урал. гос. пед. ун-т, 2003. 148 с.

10. *Сузуки М.* Строение группы и строение структуры её подгрупп. М. : Изд-во Иностранной литературы, 1960. 79 с.

11. *Ore O.* Structures and group theory, II. Duke Math. 1938. J. 4. Pp. 247–269.

Different proofs of distributivity laws for GCD and LCM

Lubyagina Elena Nikolaevna[1], Shirokov Dmitry Vladimirovich[2]
[1]PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor, associate professor of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: usr11870@vyatsu.ru
[2]PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: usr11727@vyatsu.ru

Abstract. The article proposes four proofs of the distributivity of the binary operations of taking the GCD and LCM relative to each other on the set of integers **Z**. Two proofs rely on divisibility properties, properties of prime numbers, and properties of coprime numbers. In the language of lattice theory, the distributivity of the lattice of natural numbers with respect to the "divides" relation is justified. The fourth proof uses an isomorphism between the lattice of all natural divisors of a natural number *n* and the lattice of all subgroups of a cyclic group of order *n*.

Keywords: number theory, lattice, cyclic group, distributivity, GCD, LCM.

References

1. *Akimov O. E. Diskretnaya matematika: logika, gruppy, grafy* [Discrete Mathematics: Logic, Groups, Graphs]. M., Laboratory of Basic Knowledge. 2001. 352 p.

2. *Vechtomov E. M. Osnovy teorii delimosti* [Fundamentals of Divisibility Theory] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona* – Mathematical Bulletin of Pedagogical Universities and Colleges of the Volga-Vyatka Region. 2002. No. 4. Pp. 61–73.

3. *Vechtomov E. M., Kovyazina E. M. Ciklicheskie gruppy i chisla* [Cyclic Groups and Numbers] // *Matematicheskij vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona* – Mathematical Bulletin of Pedagogical Universities and Colleges of the Volga-Vyatka Region. 2001. No. 3. Pp. 79–87.

4. *Vechtomov E. M., Shirokov D. V. Uporyadochennye mnozhestva i reshetki* [Ordered Sets and Lattices]. SPb., Lan. 2024. 248 p.

5. *Vechtomov E. M. Matematika: osnovnye matematicheskie struktury : ucheb. posobie dlya srednego profession-al'nogo obrazovaniya* [Mathematics: Basic Mathematical Structures : a textbook for Secondary Vocational Education]. 2nd ed. M., Yurait. 2024. 291 p.

6. *Vinogradov I. M. Osnovy teorii chisel* [Fundamentals of Number Theory]. M., Yurait. 2025. 123 p.

7. *Gretzer G. Obshchaya teoriya reshetok* [General Theory of Lattices] / transl. from English, M., Mir. 1982. 568 p.

8. *Grossman I., Magnus V. Gruppy i ih grafy* [Groups and Their Graphs] / transl. from English. M., Mir. 1971.

9. *Ilyinykh A. P. Teoriya chisel : ucheb. posobie* [Number Theory : a tutorial]. Yekaterinburg, Ural State Pedagogical University. 2003.

10. *Suzuki M. Stroenie gruppy i stroenie struktury eyo podgrupp* [Group structure and structure of its subgroups]. M., Foreign Literature Publishing House. 1960. 79 p.

11. *Ore O*. Structures and group theory, II. Duke Math. 1938. J. 4. Pp. 247–269.

Поступила в редакцию: 09.07.2025
Принята к публикации: 30.09.2025

УДК 51:378.016 EDN: VTCVPJ

Роль алгебраической составляющей математических курсов в профессиональной подготовке студентов IT-специальностей

Подлевских Марина Николаевна
кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Вятский государственный университет. Россия, г. Киров. E-mail: podlevskih@vyatsu.ru

Аннотация. Важность математической подготовки в становлении IT-специалистов отражается в значительном объеме математических курсов, входящих в соответствующие образовательные программы. Одной из первоначальных методических задач выстраивания рабочей программы учебной дисциплины является обоснованный отбор учебного материала. Содержание учебных курсов должно соответствовать постоянно изменяющимся требованиям, предъявляемым сферой профессиональной деятельности, быть ориентированным на развитие личности будущего специалиста и обеспечивать его конкурентоспособность на рынке труда. В данной статье на основе опыта работы со студентами IT-направлений подготовки, используя некоторые результаты приложений алгебраических методов в современных исследованиях теоретической информатики, автор анализирует алгебраическую составляющую математических дисциплин, раскрывает ее значимость в профессиональной подготовке будущих специалистов. Полученные результаты могут быть использованы для конструирования математических курсов указанных направлений подготовки.

Ключевые слова: алгебра, теория чисел, теоретическая информатика, содержание учебных курсов, IT-специальности.

Программирование как наука базируется на классических математических дисциплинах, среди которых наиболее важную роль играют алгебра и математическая логика. Прикладные IT-специальности требуют серьезной подготовки в математическом моделировании соответствующей предметной области. Разнообразие направлений подготовки, связанных с IT-сферой и реализуемых в высшей школе, влечет за собой различные подходы к формированию учебных планов, рабочих программ и наполнению учебных курсов, при этом возможность создания и использования электронных учебных пособий и целых учебных курсов позволяет достаточно гибко варьировать предлагаемый учебный материал. В этой ситуации возникает проблема выделения базиса содержания математической подготовки, который необходим для формирования профессиональных компетенций IT-специалистов. Особое значение эта методическая задача приобретает сейчас, когда в РФ ожидается переход на новые стандарты высшего образования.

Обоснованием необходимости выделения алгебраической составляющей в математической подготовке IT-специалистов является широкое применение алгебраических методов при формализации различных предметных областей, включая информатику. Практическому программированию задачи из конкретной предметной области предшествует создание абстрактной модели, для построения которой необходимо владение в том числе алгебраической терминологией. Это позволяет ввести подходящие операции и отношения, с помощью которых строится модель, определять их свойства, имеющие алгебраическую природу, и впоследствии использовать эти свойства для анализа модели. Поэтому для студентов, изучающих информатику как основу выбранной специальности, «основным содержанием математической подготовки является овладение средствами исследования разнообразных математических объектов, их взаимосвязей и преобразований» [3, с. 31]. Такая формулировка указывает на важность генерализации знаний, одного из принципов фундаментальности образования, который подробно проанализирован в статье [9], где, в частности, утверждается, что «генерализация знаний позволяет обеспечить и лучшее понимание, поскольку порождает структуру, которая значительно теснее взаимодействует с новыми знаниями, чем отдельные факты» [9, с. 8]. Изучение разделов современной алгебры предоставляет возможность реализовать этот принцип при построении математических курсов посредством изучения алгебраических структур. Подробный методологический анализ этого алгебраического материала можно найти в пособии [1].

Фундаментальность понятий современной алгебры и их широкое использование в информатике и других областях математики позволяют создавать на основе алгебраических конструкций интегральные учебные курсы. Например, в статье [3] автор предлагает использовать многоосновные алгебры как «важный интегрирующий учебно-методический конструкт для программ и курсов разных видов и уровней» [6, с. 155].

Многоосновные алгебраические системы используются как математические модели абстрактных типов данных, например, при решении проблемы автоматизации программирования задач, связанных с обработкой больших объемов информации в базах данных. Этот подход в теоретической информатике позволяет найти решение следующих практических задач: создание программного обеспечения, независимого от операционной среды; переработка программного обеспечения уровня взаимодействия с пользователем; описание процессов обработки данных, которые возможно оптимизировать. Идея использования алгебраических систем в управлении базами данных описана в статье [4]. Для понимания данного подхода к решению практических задач от специалистов требуется знание как минимум основ *абстрактной алгебры*.

Классическими математическими моделями, используемыми IT-специалистами в различных прикладных областях, являются линейные модели, изучением которых занимается *линейная алгебра*. Например, многие модели машинного обучения выражаются в матричном виде. Для обработки, преобразования данных и оценки таких моделей используются следующие понятия линейной алгебры и *теории векторных пространств:* обратная и транспонированная матрица; след, определитель, собственные значения и собственные векторы матрицы; размерность объекта или системы; векторы и их скалярное произведение, линейная зависимость и другие. Линейные модели, используемые в машинном обучении, можно найти в учебном пособии [8].

Для изучения основ теории кодирования, раздела теории информации, необходимо владеть методами *теории конечных полей*, которая является важной прикладной частью *теории алгебраических структур.* Теория конечных полей также использует *теорию многочленов,* тесно связанную с развитием классической алгебры.

В современных методах кодирования и шифрования успешно применяются понятия и методы алгебраической *теории чисел*. Например, для обмена данными, верификации источника программного обеспечения или отправителя данных используется алгоритм криптографии RSA, который является базовой частью HTTPS-протокола, широко используемого в РФ. Данный алгоритм основан на применении двух ключей: открытого и закрытого. Не обсуждая, как работает этот алгоритм, остановимся на процедуре получения этих ключей, что является математической задачей, состоящей из следующих этапов.

1. По отобранным случайным образом двум простым числам и вычисляется функция Эйлера от произведения этих чисел: $\varphi(pq) = \varphi(n)$.

2. Выбирается число e, удовлетворяющее системе условий: $e < \varphi(n)$ и $НОД\big(e, \varphi(n)\big) = 1$.

3. Находится число x, удовлетворяющее сравнению: $ex \equiv 1\big(mod\ \varphi(n)\big)$.

4. Пары полученных чисел определяют ключи шифрования: – открытый ключ, – закрытый ключ.

Следовательно, для определения ключей шифрования в RSA необходимо знать следующие факты из теории чисел: простое число, взаимно-простые числа, наибольший общий делитель (НОД), функция Эйлера и ее свойства, отношение сравнимости по модулю. Кроме того, нужно уметь проводить генерацию простых чисел, вычислять функцию Эйлера, находить НОД пары чисел (алгоритм Евклида), решать сравнения с одной переменной, проводить вычисления, используя модульную арифметику, в том числе для процедуры шифровки и дешифровки информации. Знание основ теории чисел также дает понимание идеи, на которой основан данный алгоритм шифрования: сложность задач дискретного логарифмирования и факторизации произведения двух больших простых чисел. Подробное описание математической основы этой идеи шифрования можно найти в учебных пособиях по теории чисел, рекомендуемых для высшего образования, например [7].

Значимость изучения алгебраического материала, на наш взгляд, состоит в том, что на его основе создается база идей, применяемых при решении разнообразных прикладных задач, в том числе задач информатики. Это выявление структуры объекта относительно операций над этим объектом; понимание тождественности, изоморфности, гомоморфности объектов; арифметизация объекта; возможность описания объекта на основе различных систем оценок; получение новых объектов с помощью алгебраических методов, таких как подструктура или фактор-объект; выстраивание иерархии объектов; применение наиболее простых или наиболее адекватных поставленной задаче преобразований с объектами.

Например, изучение кольца классов вычетов не только дает пример факторизации кольца целых чисел, но и позволяет продемонстрировать возможность замены процедуры в общем виде бесконечного перебора на перебор конечный – ситуация, которая встречается во многих прикладных задачах. Знакомство с понятиями базиса и системы образующих в теории векторных пространств показывает, как бесконечное число объектов можно однозначно описать минимальным, возможно конечным и независимым друг от друга набором параметров, а возможность перехода к другому базису – это возможность изменения системы параметров или оценок, описывающих объект.

Включение алгебраического материала в математические курсы имеет и методологическое значение: знакомство с различными алгебраическими структурами дает современное представление о содержании математики как науки. Изучение различных алгоритмов решения алгебраических задач, применяемых в теоретической информатике, а также их обоснование формирует алгоритмическую культуру обучающихся. Задачи, имеющие известный алгоритм решения, можно решать с помощью систем компьютерной математики. Их использование в процессе обучения позволяет освободить время для более глубокого изучения материала, а также дает возможность разнообразить предлагаемый учебный материал, включая в него задания творческого характера, что формирует более конкурентоспособного специалиста.

Итак, изучение основ современной алгебры и теории чисел позволяет решать важные задачи в профессиональной подготовке IT-специалистов, что необходимо учитывать при разработке образовательных программ и учебных планов соответствующих направлений подготовки. Объем статьи не позволяет привести большее число примеров, но можно сделать вывод, что к алгебраической составляющей математической подготовки IT-специалистов следует как минимум отнести: линейную алгебру, включающую теорию векторных пространств; отдельные разделы теории чисел; теорию алгебраических и порядковых структур; теорию многочленов.

Отметим, что в зависимости от реализуемой образовательной программы и уровня подготовки студентов данное содержание можно оформить в виде отдельного курса алгебры и теории чисел или распределить по разным учебным математическим дисциплинам. Как математическую основу элементы алгебры и теории чисел можно включать в содержание специальных профессионально ориентированных учебных курсов, таких как, например, теория автоматов, теория кодирования. Отдельные темы, имеющие прикладное значение, могут стать основой факультативов или частью самостоятельной работы для подготовки к специальным курсам, например [2, 5]. В качестве примера приведем также курс математики, разработанный преподавателями кафедры прикладной математики и информатики ВятГУ [10].

Список литературы

1. *Вечтомов Е. М.* Основные математические структуры. Киров : Радуга-ПРЕСС, 2013. 292 с.

2. Вычисления в конечных полях : учеб.-метод. пособие / Ш. Т. Ишмухаметов, Р. Г. Рубцова. Казань : Казанский ун-т, 2019. 23 с.

3. *Гейн А. Г.* Фундаментальное математическое образование и подготовка IT-аналитиков // Образовательные технологии. 2018. № 1. С. 28–33.

4. *Емельченков Е. П., Левин Н. А., Мунерман В. И.* Алгебраический подход к оптимизации разработки и эксплуатации систем управления базами данных // Системы и средства информатики : сб. ст. М., 2009. Т. 19, № 2. С. 114–137.

5. *Ишмухаметов Ш. Т.* Методы факторизации натуральных чисел : учеб. пособие. Казань : Казанский федеральный университет, 2011. 190 с.

6. Многоосновные алгебры как интегрирующий конструкт при комплексном изложении учебных курсов в области естественных наук и когнитивных методов / И. В. Степура // Наука и образование: опыт, проблемы, перспективы развития : сб. ст. по материалам междунар. науч.-практ. конф. Красноярск., 2021. Т. 2, ч. 2. С. 151–156.

7. *Нестеренко Ю. В.* Теория чисел : учеб. для студ. высш. учеб. завед. М. : Академия, 2008. 272 с.

8. Практический курс классического машинного обучения с использованием моделей математического программирования : учеб.-метод. пособие / П. Ф. Чернавин, Н. П. Чернавин, Ф. П. Чернавин. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2023. 124 с.

9. *Тестов В. А.* Фундаментальность образования: современные подходы // Педагогика. 2006. № 4. С. 3–9.

10. Курс математики. URL: https://e.vyatsu.ru/course/view.php?id=5504.

The role of the algebraic component of mathematical courses in the professional training of students of IT specialties

Podlevskikh Marina Nikolaevna

PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor, associate professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Vyatka State University. Russia, Kirov. E-mail: podlevskih@vyatsu.ru

Abstract. The importance of mathematical training in the development of IT specialists is reflected in the significant volume of mathematical courses included in the relevant educational programs. One of the initial methodological tasks of building a work program for an academic discipline is the reasonable selection of educational material. The content of the training courses should meet the constantly changing requirements of the field of professional activity, be focused on the personal development of the future specialist and ensure his competitiveness in the labor market. Based on the experience of working with students of IT fields of study, using some results of applications of algebraic methods in modern research of theoretical computer science, this article analyzes the algebraic component of mathematical disciplines and reveals its importance in the professional training of future specialists. The results obtained can be used to design mathematical courses in these areas of study.

Keywords: algebra, number theory, theoretical computer science, the content of the training course, IT qualifications.

References

1. *Vechtomov E. M. Osnovnye matematicheskie struktury* [Basic Mathematical Structures]. Kirov, Raduga-PRESS. 2013. 292 p.

2. *Vychisleniya v konechnyh polyah : ucheb.-metod. posobie* [Computations in a finite fields : educational and methodological guide] / Sh. T. Ishmukhametov, R. G. Rubtsova. Kazan, Kazan Federal University. 2019. 23 p.

3. *Gein A. G. Fundamental'noe matematicheskoe obrazovanie i podgotovka IT-analitikov* [Fundamental Mathematical Education and Training of IT Analysts] // *Obrazovatel'nye tekhnologii* – Educational Technologies. 2018., No. 1. Pp. 28–33.

4. *Emelchenkov E. P., Levin N. A., Munerman V. I. Algebraicheskij podhod k optimizacii razrabotki i ekspluatacii sistem upravleniya bazami dannyh* [Algebraic Approach to Optimizing the Development and Operation of Database Management Systems, Systems and Means of Information] // *Sistemy i sredstva informatiki : sb. st.* – Computer science systems and tools: collection of articles. M., 2009. Vol. 19. No. 2. Pp. 114–137.

5. *Ishmukhametov Sh. T. Metody faktorizacii natural'nyh chisel : ucheb. posobie* [Methods of Factoring Natural Numbers : a tutorial]. Kazan, Kazan Federal University. 2011. 190 p.

6. *Mnogoosnovnye algebry kak integriruyushchij konstrukt pri kompleksnom izlozhenii uchebnyh kursov v oblasti estestvennyh nauk i kognitivnyh metodov* [Multigroup algebras as an integrating construct in the complex presentation of training courses in the field of natural sciences and cognitive methods] / I. V. Stepura // *Nauka i obrazovanie: opyt, problemy, perspektivy razvitiya : sb. st. po materialam mezhdunar. nauch.-prakt. Konf* – Science and Education: Experience, Problems, and Prospects of Development: Collection of Articles based on the materials of the International Scientific and Practical Conference. Krasnoyarsk, 2021. Vol. 2. Part 2. Pp. 151–156.

7. *Nesterenko Yu. V. Teoriya chisel : ucheb. dlya stud. vyssh. ucheb. zaved.* [Number Theory : textbook for university students]. M., Academy. 2008. 272 p.

8. *Prakticheskij kurs klassicheskogo mashinnogo obucheniya s ispol'zovaniem modelej matematicheskogo programmirovaniya : ucheb.-metod. posobie* [Practical course of classical machine learning using mathematical programming models : educational and methodological guide] / P. F. Chernavin, N. P. Chernavin, F. P. Chernavin. Yekaterinburg, Ural University Publ. 2023. 124 p.

9. *Testov V. A. Fundamental'nost' obrazovaniya: sovremennye podhody* [Fundamentality of Education: Modern Approaches] // *Pedagogika* – Pedagogy. 2006. No. 4. Pp. 3–9.

10. *Kurs matematiki* [Mathematics course]. Available at: https://e.vyatsu.ru/course/view.php?id=5504.

Поступила в редакцию: 18.06.2025
Принята к публикации: 02.07.2025

Математический вестник Вятского государственного университета

Научный журнал № 2 (33) (2025)

16+

Вятский государственный университет,
610000, г. Киров, ул. Московская, 36
(8332) 208-964